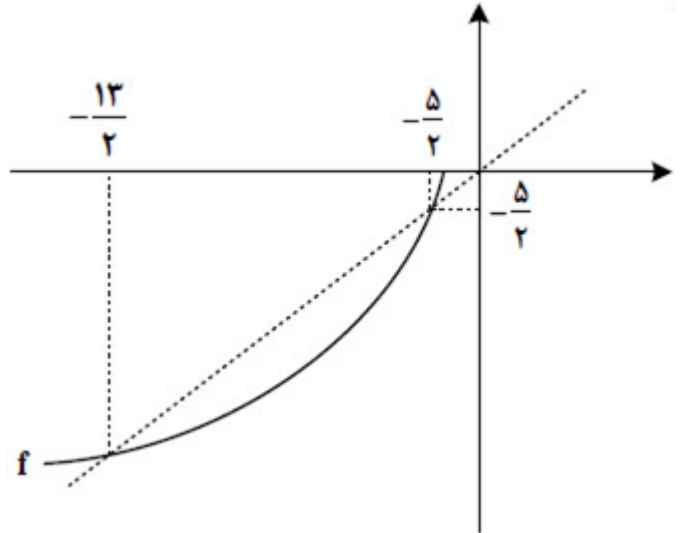


۴ شکل زیر، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f^{-1}(x)}{x - f^{-1}(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۵ اگر $y = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, x \geq 0$ ضابطه تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۹ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۶ تابع $y = (x-1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۷ اگر $f = \left\{ \left(\frac{1}{9}, -1 \right), \left(\frac{1}{3}, 1 \right), \left(-\frac{1}{4}, 3 \right), \left(\frac{1}{4}, -3 \right) \right\}$ و $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ و $\text{fog}^{-1}(a) = -3$ باشد، مقدار a کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$-\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{1}{9}$ (۲)

$-\frac{1}{9}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۸ مقدار غیرصفر حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b\sqrt{2-\sqrt{x}}-b}{ax+b}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$-\frac{1}{6}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۵ اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $\text{gof}\left(-\frac{5}{3}\right)$ کدام است؟

۶ (۴)

-۶ (۳)

-۴ (۲)

۴ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۶ اگر $f(x) = (x + \text{Log } x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(\text{fof})(x) < f(x^5)$ کدام است؟

$(1, +\infty)$ (۴)

$(5, +\infty)$ (۳)

$(0, 1)$ (۲)

$(0, 5)$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۷ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}$ مقدار $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

$\text{Log } \frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴)

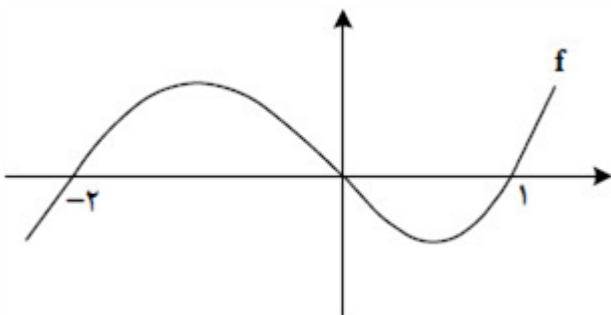
$\text{Log } \sqrt{\frac{3}{2}}$ (۳)

$\text{Log } \frac{3}{2}$ (۲)

$\text{Log } \frac{1}{2}$ (۱)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۸ نمودار مقابل، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۵ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۹ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ باشد، حاصل $g\left(-\frac{3}{7}\right) + g\left(\frac{5}{9}\right)$ کدام است؟

$-\frac{1}{3}$ (۴)

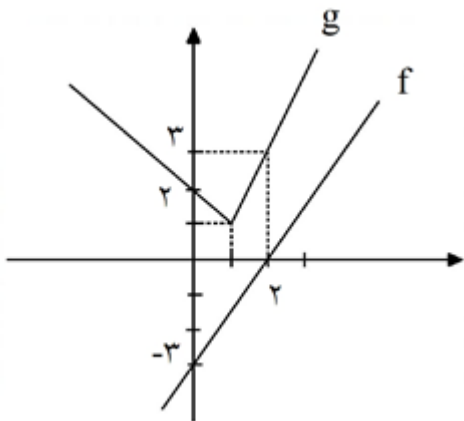
$-\frac{11}{28}$ (۳)

$\frac{19}{20}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

با توجه به نمودارهای f و g در شکل مقابل، حاصل $g \circ f^{-1}(-2) \times g \circ g(0)$ کدام است؟



۴ -۶

۳ -۴

۲ ۴

۱ ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۶ وارون تابع $y = -3x^2 + 2x - 11$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۴ $(-12, -1)$

۳ $(-1, 10)$

۲ $(2, -31)$

۱ $(9, -2)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۷ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۴ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۳ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۲ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۸ اگر $g \circ f(x) = 5x^2 + 11$ و $f(x) = 2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x - 7)$ چقدر است؟

۴ ۱۱

۳ ۹

۲ ۷

۱ ۳

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۲۹ وارون تابع $y = x^2 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۴ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8}\right)$

۳ $(1, 2)$

۲ $\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right)$

۱ $(-1, -2)$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۳۰ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

۴ $\sqrt{10}$

۳ $2\sqrt{5}$

۲ ۲

۱ ۱

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۳۸ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- ۱ $\text{Log}_2(-1 + \sqrt{5})$
 ۲ $\text{Log}_2(1 + \sqrt{5})$
 ۳ $\text{Log}_2(2 + \sqrt{5})$
 ۴ $\text{Log}_2(3 + \sqrt{5})$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۳۹ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۱ $(-1, 1)$
 ۲ $(-1, 1]$
 ۳ $[1, +\infty)$
 ۴ $(-\infty, 1]$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۴۰ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟

- ۱ ۱۲
 ۲ ۱۱
 ۳ ۱۰
 ۴ ۸

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۴۱ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x; (x > 1)$ مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور x ها را، 16 واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- ۱ $4\sqrt{5}$
 ۲
 ۳
 ۴

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۴۲ در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- ۱ ۱
 ۲ $\frac{3}{2}$
 ۳ ۲
 ۴ $\frac{5}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۴۳ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه‌ی $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه‌ی چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۱ $\frac{3}{4}$
 ۲ ۱
 ۳ $\frac{3}{2}$
 ۴ ۲

سراسری - تجربی - ۹۹

۴۴ فرض کنید در دامنه‌ی $(0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- ۱ $\text{Log}_2(2 - \sqrt{3})$
 ۲ $\text{Log}_2(\sqrt{3} - 1)$
 ۳ $\text{Log}_2(1 + \sqrt{3})$
 ۴ $\text{Log}_2(2 + \sqrt{3})$

سراسری - تجربی - ۹۹

۵۴ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- ۱ x ۲ $-x$ ۳ $-x-1$ ۴ $x+1$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۵ اگر $g(x) = 2x+1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

- ۱ $2x^2 + 3x + 1$ ۲ $2x^2 - 2x + 3$ ۳ $2x^2 - x + 4$ ۴ $2x^2 + x + 3$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^3|$ با دامنه‌ی R ، چگونه است؟

- ۱ نزولی ۲ صعودی ۳ وارون‌ناپذیر ۴ یک‌به‌یک

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۷ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x-6| - |x+1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

- ۱ $-x+7; x > 8$ ۲ $\frac{1}{3}x+2; x > 3$
 ۳ $x+7; x > -4$ ۴ $\frac{1}{2}x-1; -4 < x < 8$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۸ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند. دامنه‌ی تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- ۱ $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ۲ $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ۳ $(-2, 0)$ ۴ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۹ به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیم‌ساز نایچه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

- ۱ -4 ۲ $-12, 4$ ۳ $12, -4$ ۴ 12

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۷ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟

۲/۷۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۱/۷۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۶۸ اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

$\frac{2x-1}{x^2-1}$ (۴)

$\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۳)

$\frac{2x}{x^2-1}$ (۲)

$\frac{1}{1-x^2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۶۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور xها را در نقطه‌ای به طول یک و محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۶ قطع کرده و از نقطه $(-2, -6)$ می‌گذرد، $f(-1)$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۵ (۳)

-۷ (۲)

-۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2} \xrightarrow{x=3} f(3) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{4} = 3 \Rightarrow a = 4$$

تذکر: در اصل سؤال، شرط $x \geq 0$ نبود که در این صورت تابع وارون‌پذیر نمی‌باشد و منظور طراح، بخشی از تابع است که وارون‌پذیر است. در کل داریم:

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4x + 4\sqrt{x}, x \geq 0$$

$$f(x) = \frac{x+2}{4} - \frac{\sqrt{x+1}}{2}, -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 4x - 4\sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$f(x) = (x-1)|x| = \begin{cases} x(x-1) & x \geq 0 \\ x(1-x) & x < 0 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 0 \\ 1-2x & x < 0 \end{cases}$$

$$a+b = \frac{1}{2} \leftarrow a=0, b=\frac{1}{2}$$

تابع f در بازه $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

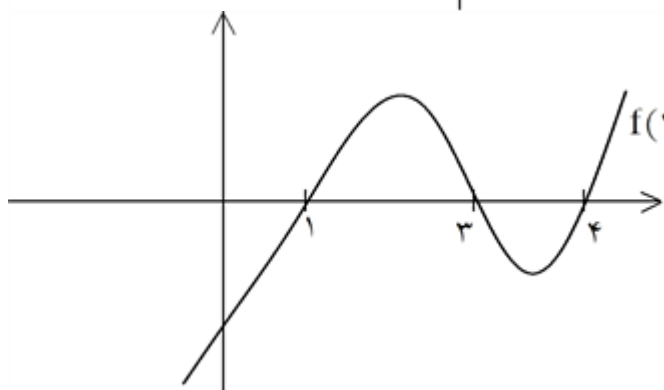
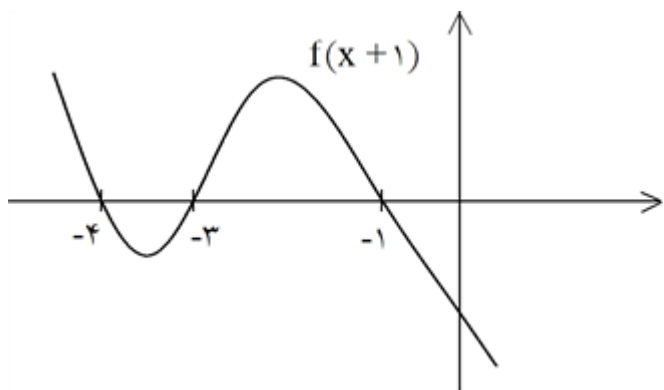
$$\left. \begin{aligned} f \circ g^{-1}(a) = -3 &\Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -3 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{4} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = a = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون حد صورت صفر است پس حد مخرج نیز باید صفر باشد.

$$a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b(\sqrt{2-\sqrt{x}}-1)}{-bx+b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-\sqrt{x}}-1}{1-x} \xrightarrow{\sqrt{x}=t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-t}-1}{1-t^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\cancel{1-t}}{(1-t)(1+t)(\sqrt{2-t}+1)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x - 2)$ را ۳ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $f(x + 1)$ به دست آید پس نسبت به محور y قرینه می‌کنیم تا $f(1 - x)$ شود.



$$\left. \begin{aligned} \frac{f(1+x)}{f(1-x)} &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{Z} \\ x &\in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned} \right\}$$

$$f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f(2) = 4$$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} - f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right]\right) = f(1) = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$a - b = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow a = \frac{b}{1}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2}{\frac{x}{8} - 1} \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{x}} + 2}{2 + 2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x} - 2}{\frac{x}{4} - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2^2}{4 + 4 + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{6x - 48} = \frac{1}{6}$$

تذکر: سؤال با قاعده هوییتال نیز قابل حل است.

$$\text{ضابطه اول: } R_1 = \left[\frac{13}{2}, +\infty \right)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$\text{ضابطه دوم: } -x^2 + 2mx + 2 = -(x - m)^2 + m^2 + 2$$

باید رأس سهمی $(x = m)$ داخل بازه $x > -\frac{3}{2}$ نباشد، پس:

$$m \leq -\frac{3}{2} \xrightarrow{m^2 + 2 \leq \frac{13}{2}} m = -2 \Rightarrow y_2 = -(x + 2)^2 + 6$$

$$f^{-1}(-19) \Rightarrow -(x + 2)^2 + 6 = -19 \Rightarrow (x + 2)^2 = 25 \xrightarrow{x > -\frac{3}{2}} x = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1$$

$$g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$g(g(1)) = g(4) = 9$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۲

$$\begin{cases} x \leq \frac{-5}{3} \Rightarrow y = -(2x + 5) - (-5x + 2) \Rightarrow y = 3x - 7 \\ x \geq \frac{2}{5} \Rightarrow y = (2x + 5) - (5x - 2) \Rightarrow y = -3x + 7 \end{cases}$$

$$y = -3x + 7 \Rightarrow 3x = -y + 7 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}y + \frac{7}{3} \xrightarrow{y \geq \frac{2}{5}} f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, x \leq \frac{29}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۳

$$\left. \begin{aligned} f \text{ تابع ثابت} \Rightarrow m = n = 0 \Rightarrow f(x) = -k \\ (m, n - 1) = (0, k) \Rightarrow k = n - 1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۴

$$x^2 f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow \text{اعداد صحیح نامنفی} = \{0, 1, 2, 3\}$$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
f(x)	+	-	

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۵

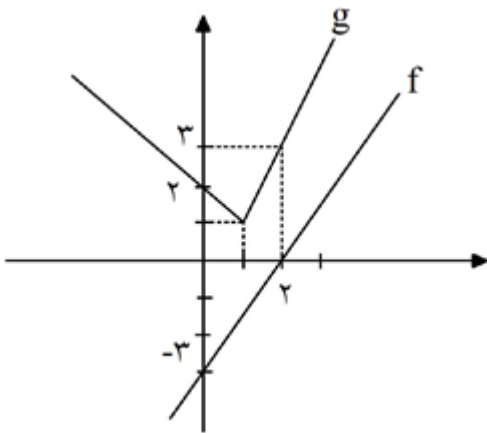
$$g \circ g(0) = g(2) = 3$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 3$$

$$f^{-1}(-2) = ? \Rightarrow f(?) = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x - 3 = -2 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) = ?$$

$$x < 1 \Rightarrow g(x) = -x + 2 \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{حکم} = \frac{4}{3} \times 3 = 4$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$y(-2) = 24 - 4 - 11 = 9 \Rightarrow (-2, 9) \in f \Rightarrow (9, -2) \in f^{-1}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قرینه $y = 2 + \sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y = x$ تابع وارون آن است.

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان میرسانیم}} y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{واحد در جهت } x \text{ مثبت}} y = (x - 2 - 2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد در جهت } y \text{ منفی}} g(x) = (x - 4)^2 + 1 - 3$$

$$\Rightarrow g(x) = (x - 4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = (4 - 4)^2 - 2 = -2$$

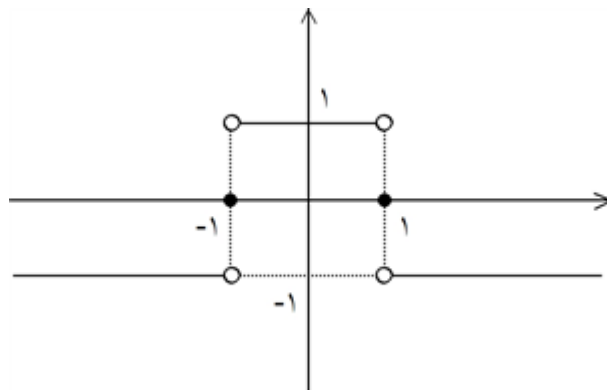
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(\text{gof})(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $1 - x^2$ مثبت باشد برابر ۱ و اگر $1 - x^2$ منفی باشد، حاصل y برابر -۱ و اگر $1 - x^2$ برابر صفر باشد، حاصل y برابر صفر است.

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow g(f(x)) = 1 \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \\ 1 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \Rightarrow g(f(x)) = -1 \end{cases}$$

با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه و $(\text{gof})(x)$ برابر است با:

$$(\text{gof})(x) = \begin{cases} 1 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; x = \pm 1 \\ -1 & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

یا رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.



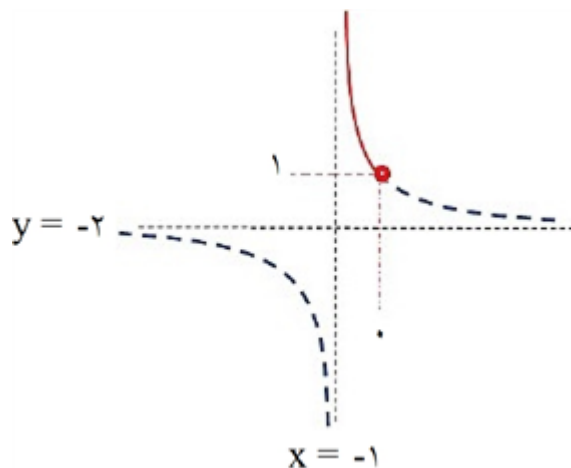
در شکل مشخص است که تابع در $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته است.

$$f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \xrightarrow{2^x=A} \frac{A - \frac{1}{A}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{A^2 - 1}{A} = 4$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A - 1 = 0$$

$$A = 2 + \sqrt{5} \text{ ق ق } \Rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{5}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \text{Log}_2(2 + \sqrt{5})$$

$$A = 2 - \sqrt{5} \text{ غ ق ق } \Rightarrow$$



$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < [x] - x \leq 0$$

$$R \xrightarrow{f} (-1, 0], \quad x \neq -1 \xrightarrow{g} R - \{-2\}$$

$$\text{اشتراک } (-1, 0] \xrightarrow{g} [1, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$$

$$x + 2\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$x + 2\sqrt{x} = 15 \Rightarrow x = 9$$

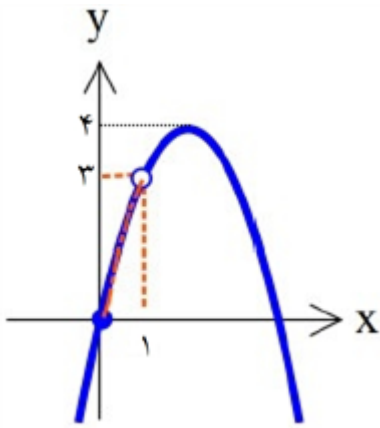
$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه محور } x \text{ ها}} f(x) = -x^2 + 2x \xrightarrow{+16 \text{ محور } y \text{ ها}}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 16 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ق ق } \text{ غ} \\ x = 4 \text{ ق ق } (x > 1) \end{cases} \Rightarrow A \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases}$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$



باید صدق کند $R_{f(x)} = D_{g(x)}$

$$R_{f(x)} = \{0 \leq 2x - [2x] < 1\} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = -1 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow R_f = [0, 3)$$

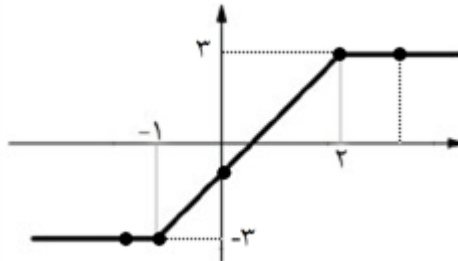
g در این بازه صعودی است

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک نقطه‌یابی نمودار f را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = |x + 1| - |x - 2|$$

نقاط شکست

x	-2	-1	2	3
y	-3	-3	3	3



پس f در بازه‌ی $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\wedge) = g^{-1}(f^{-1}(\wedge))$$

$$f(x) = \wedge \Rightarrow \frac{2}{\Delta}x - 4 = \wedge \Rightarrow \frac{2}{\Delta}x = 12 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow f^{-1}(\wedge) = 30 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(\wedge)) = g^{-1}(30)$$

$$g(x) = 30 \Rightarrow x^2 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است عرض محل برخورد f با وارون g^{-1} را به دست آوریم:

$$g(x) = \frac{x-9}{2} = y \Rightarrow x-9 = 2y \Rightarrow x = 2y+9 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g^{-1}(x) = 2x+9 \\ f(x) = x^2 - 2x - 3, x \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 2x + 9 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ ق ق} \Rightarrow y = 2(6) + 9 = 21 \\ x = -2 \text{ ق غ} \end{cases}$$

$$f^{-1} = \{(2, 5), (3, 7), (1, 4), (6, 3), (1, 9)\} \Rightarrow f^{-1}(2) = 7$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{5}$$

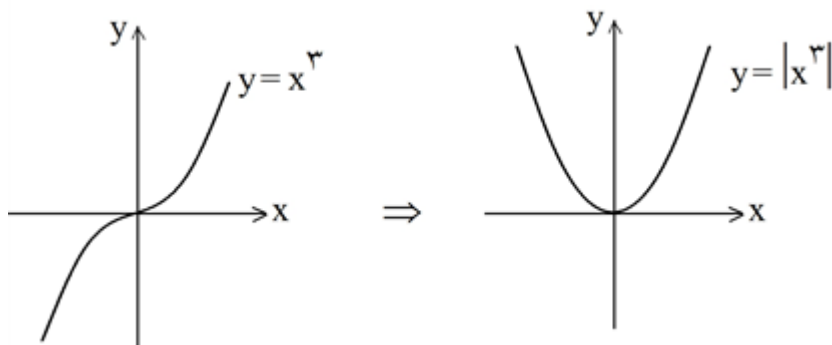
$$3 \xrightarrow{f^{-1}} 7 \xrightarrow{g^{-1}} a$$

$$\Rightarrow f(g(a)) = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$3 \xleftarrow{f} 7 \xleftarrow{g} a$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = -x-1 \text{ or } 1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -2$$

$$f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 = 2(2x+1)^2 - (2x+1) + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$



$$f(x) = |2x - 6| - |x + 1| = \begin{cases} (2x - 6) - (x + 1) & x \geq 3 \\ -2x + 6 - (x + 1) & -1 \leq x < 3 \\ -2x + 6 - (-x - 1) & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 7 & x \geq 3 \\ -3x + 5 & -1 \leq x < 3 \\ -x + 7 & x < -1 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها مشخص است که ضابطه‌ی $y = x - 7$ برای $x \geq 3$ صعودی است.

$$x \geq 3 \xrightarrow{-7} x - 7 \geq -4 \Rightarrow y \geq -4$$

$$y = x - 7 \Rightarrow y + 7 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x + 7$$

نکته: در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین $y \geq -4$ برای تابع معکوس محدوده‌ی دامنه می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین دامنه تابع $g \circ f$ ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x + |x|} \xrightarrow{D_f} x + |x| \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 0 \\ x < 0 : x - x \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{همواره برقرار} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

حال با توجه به دامنه‌ی تعریف تابع مرکب، می‌نویسیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x + |x|} \in (\mathbb{R} - \{0, 4\})\right\}$$

باید مقادیری از x که به ازای آن‌ها $f(x) = \sqrt{x + |x|}$ برابر ۰ یا ۴ می‌شوند را از \mathbb{R} کنار بگذاریم. داریم:

$$\sqrt{x + |x|} = 0 \Rightarrow x + |x| = 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq 0$$

$$\sqrt{x + |x|} = 4 \Rightarrow x + |x| = 16 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \\ x < 0 : x - x = 16 \Rightarrow 0 = 16 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین اگر از \mathbb{R} ، $x = 8$ و $x \leq 0$ را کنار بگذاریم، دامنه‌ی $g \circ f$ به دست می‌آید:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\leq 0, x \neq 8\} = \mathbb{R} > 0 - \{8\} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x) = [x]$ است. برای تعیین مقادیر تابع $f(x - f(x))$ یا همان $f(x - [x])$ کافی است به این نکته توجه کنیم که تابع داخلی، یعنی $x - [x]$ همواره در فاصله‌ی $(0, 1)$ تغییر می‌کند، پس داریم:

$$f(x) = [x] \Rightarrow f(x - f(x)) = f(x - [x]) = [x - [x]] = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ است. برای تعیین مقدار $g(-2)$ ابتدا خودمان با داشتن ضابطه‌ی f ضابطه‌ی $f(g(x))$ را ساخته و برابر $4x^2 + 6x$ قرار می‌دهیم و آن‌گاه با جایگذاری $x = -2$ مقدار $g(-2)$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f(g(x)) = 2g^2(x) + 4 \Rightarrow 2g^2(x) + 4 = 4x^2 + 6x \Rightarrow g^2(x) = 2x^2 + 3x - 2 \\ f(g(x)) = 4x^2 + 6x \end{cases} \xrightarrow{x=-2} g^2(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2) - 2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴