۱- مقدار مساحت ناحیهٔ بین نمودارهای دو تابع $f(x)=|۲x-۱|$ و $g(x)=x+۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

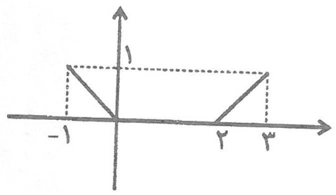
۲- دو تابع $f(x)=|x-a|\sqrt{۲x^۲-۴}$ و $g(x)=\sqrt{(x-a)^۲(۲x^۲-۴)}$ مساوی نیستند. در این صورت باید $a\in(m,n)$ باشد. حداکثر $n-m$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۳- تابع پیوسته $f(x)$ اکیداً صعودی با دامنهٔ $(۰,۱۰)$ و برد $(۰,۵)$ است که از نقطهٔ $(۱,۱)$ عبور می‌کند. یکنوایی تابع $g(x)=(f(x)-\frac{۱}{f(x)})^۲$ در دامنه‌اش چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی
۳) ابتدا اکیداً صعودی، سپس اکیداً نزولی ۴) ابتدا اکیداً نزولی، سپس اکیداً صعودی

۴- نمودار تابع $y=f(x)$ به‌شکل زیر است. با فرض $k<۰$ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $kf(\frac{x}{k})=۴k+۱$ برابر -۳ است. مقدار $f(|k|+۱)$ کدام است؟

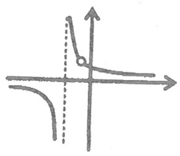
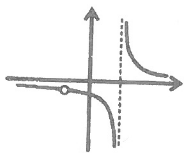
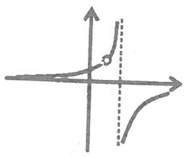
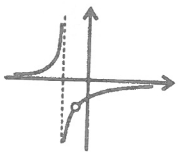


۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۵- اگر دامنهٔ تابع $y=۲f(۲x)+۱$ بازهٔ $[۳,۵]$ باشد، بزرگ‌ترین دامنهٔ تابع $g(x)=-f(\frac{۱-x}{۳})$ کدام است؟

۱) $[-۲۹,-۱۷]$ ۲) $[-\frac{۱۳}{۲},\frac{-۷}{۲}]$ ۳) $[\frac{-۹}{۳},-\frac{۵}{۳}]$ ۴) $[-۲۷,-۱۹]$

۶- ضابطهٔ تابع $f(x)=\frac{۳x-۳}{(x-۲)(x+۱)}$ است. اگر $f(x)-g(x)=\frac{۲}{x+۱}$ باشد، آنگاه نمودار تابع $g(x)$ در بزرگ‌ترین دامنه‌اش به کدام شکل است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۷- اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x-۳$ و $((\frac{f}{g})oh)(x)=۲g(x)+۱$ باشد، تابع $h(x)$ به‌ازای کدام مقدار زیر تعریف نشده است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

۸- اگر $f(x)=۳x+۱\ (-۱<x<۰)$ باشد، آنگاه ضابطهٔ تابع $g(x)=fof(x)$ در بزرگ‌ترین دامنه‌اش کدام است؟

۱) $g(x)=۹x+۴\ (-۱<x<۰)$
۲) $g(x)=۹x+۴\ (-\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳})$
۳) $g(x)=۶x+۳\ (-۱<x<۰)$
۴) $g(x)=۶x+۳\ (-\frac{۲}{۳}<x<-\frac{۱}{۳})$

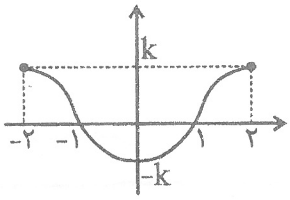
۹- ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=ax^۲+bx+c$ است. مقدار $۲a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۰- f, g دو تابع وارون‌پذیر، $f^{-۱}(x)=۸x^۳+۲x$، $g^{-۱}(x)=ax^۳+bx$ و $f(x)=۲g(x)$، آنگاه $a+۲b$ کدام است؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۷۲　　۴) ۷۴

۱۱- نمودار تابع $f(x)$ به‌شکل زیر است. معادلهٔ $\frac{f(x)}{[x]}=\frac{-f(۰)}{۲}$ چند ریشه دارد؟



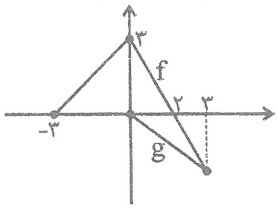
۱) صفر　　۲) ۱

۳) ۲　　۴) ۳

۱۲- بزرگ‌ترین برد تابع $g=(x-[x])^۲-(x-[x])+۱$ کدام است؟ $(x\in\mathbb{R})$

۱) $[\frac{۳}{۴},۱)$　　۲) $[\frac{۳}{۴},۱]$　　۳) $[\frac{۳}{۴},۲)$　　۴) $[۱,۲)$

۱۳- نمودارهای دو تابع f و g به‌شکل‌های زیر هستند. معادلهٔ $fog(x)=k$ دارای یک ریشه است. حدود k کدام است؟



۱) $[۰,۳)$　　۲) $[۰,۳]$

۳) $[-\frac{۳}{۲},۰]$　　۴) $\left[\frac{۳}{۲},۳\right]$

۱۴- تابع اکیداً نزولی f را در نظر بگیرید، اگر $f(۲)=۰$ باشد، دامنه تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(۲x-۱)-f(۲x)}{f(x)}}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۱۵- اگر $f(x)=x+n[x]$ و $g(x)=x-n[x]$، برای چند صحیح n، دوتابع $fog(x)$ و $gof(x)$ باهم برابر هستند؟

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) بی‌شمار

۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۰\\ x^۳ & x\leq ۰\end{cases}$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(fof)(x)\geq(fof^{-۱})(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۷- اگر $f(x)=\begin{cases}mx+۱ & x\geq ۱\\ (۳-m)x-۱ & x<۱\end{cases}$ روی دامنه خود وارون‌پذیر باشد، $f^{-۱}$، وارون تابع f به‌ازای مقادیر صحیح m است، مقدار $f^{-۱}(m+۱)$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) -۲　　۳) ۱　　۴) -۱

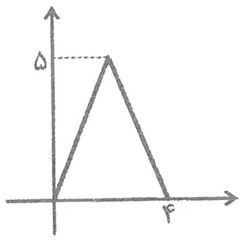
۱۸- حداقل چند زوج مرتب از مجموعه $\{(x,y): x,y\in\mathbb{Z} \text{ و } x^۲+y^۲=۲۵\}$ حذف کنیم تا آن مجموعه تبدیل به تابع شود؟

۱) ۱　　۲) ۳　　۳) ۵　　۴) ۷

۱۹- تابع $f(x)=x^۳+x$ را در نظر بگیرید، جواب معادله $f^{-۱}(\frac{۸x+۳}{۴})=۲f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$　　۲) $\frac{۵}{۴}$　　۳) $\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۵}{۸}$

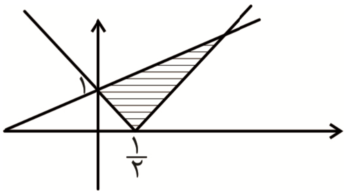
۲۰- تابع $y = f(2x-1)$ به‌صورت زیر است، مساحتی که تابع $y = 3f(3-5x)$ با محور xها می‌سازد چقدر است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

ریاضی

۱. گزینه ۲ درست است.



نمودارهای دو تابع را رسم می‌کنیم.

ناحیهٔ بین دو نمودار به‌شکل مثلثی با دو رأس $(\frac{1}{2},0)$ و $(0,1)$ است. برای یافتن مختصات رأس سوم باید ضابطهٔ دو تابع را مساوی بگذاریم:

$$|2x-1|=x+1\xrightarrow{x>\frac{1}{2}}2x-1=x+1\to x=2\to y=3$$

مساحت مثلثی به رأس‌های $(\frac{1}{2},0)$، $(0,1)$، $(2,3)$ را به روش زیر می‌یابیم:

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left((0\times3+2\times0+\frac{1}{2}\times1)-(2\times1+\frac{1}{2}\times3+0\times0)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

با توجه به مثبت بودن مقدار مساحت $s=\frac{3}{2}$ درست است.

۲. گزینه ۴ درست است.

دامنه تابع f برابر است با:

$$2x^2-4\ge0\to x^2\ge2\to\begin{cases}x\ge\sqrt{2}\\ x\le-\sqrt{2}\end{cases}$$

دامنهٔ تابع g را به کمک جدول تعیین علامت می‌یابیم:

$$(x-a)(2x^2-4)\ge0$$

	$-\sqrt{2}$		a		$\sqrt{2}$	
$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

اگر $a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ باشد، دامنهٔ تابع g به‌صورت $\{x\ge2\}\cup\{x\le-2\}\cup\{a\}$ در می‌آید و با توجه به مساوی نبودن دامنهٔ دو تابع، تساوی تابع‌ها امکان‌پذیر نیست.

$$a\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\Rightarrow n-m \text{ حداکثر}=(\sqrt{2})-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

۳. گزینه ۴ درست است.

با توجه به اینکه $f(x)>0$ و اینکه $f(x)$ اکیداً صعودی است، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{1}{f(x)}$ اکیداً نزولی است و $y=f(x)-\frac{1}{f(x)}$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی:

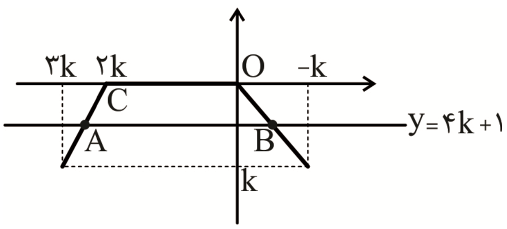
$$\begin{cases}0<f(x)<1\to\frac{1}{f(x)}>1\to f(x)-\frac{1}{f(x)}<0\\ 1<f(x)<5\to1>\frac{1}{f(x)}>\frac{1}{5}\to f(x)-\frac{1}{f(x)}>0\end{cases}$$

روی دامنهٔ $(0,1)$ تابع $y = f(x) - \frac{1}{f(x)}$ اکیداً صعودی و منفی است و توان دو آن تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

روی دامنهٔ $(1,10)$ تابع $y = f(x) - \frac{1}{f(x)}$ اکیداً صعودی و مثبت است و $g(x) = \left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right)^2$ تابعی اکیداً صعودی خواهد بود.

۴. گزینه ۳ درست است.

با فرض $k < 0$ نمودار نسبت به محور عرض و طول‌ها قرینه می‌شود.
همین‌طور نمودار $f(x)$ در راستای افقی و عمودی دچار انبساط k برابری می‌شود.
فرض کنیم نمودار خط افقی $y = 4k + 1$ این نمودار را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند.



دقت کنید که شیب دو پاره‌خط مورب برابر 1 , -1 است.
با توجه به فرض سؤال داریم:

$$x_A + x_B = -3 \rightarrow x_c = -3 \rightarrow 2k = -3 \rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

اکنون مقدار $f(|k|+1) = f(\frac{5}{2})$ را می‌یابیم.

با توجه به‌شکل تابع $f(x)$، ضابطهٔ خط مورب در قسمت مثبت محور xها را می‌یابیم:

$$f(x) = x - 2 \rightarrow f(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

۵. گزینه ۱ درست است.

به کمک دامنهٔ تابع $y = 2f(2x) + 1$، دامنهٔ تابع $f(x)$ را که بازهٔ $[6,10]$ است را می‌یابیم.
برای یافتن دامنهٔ تابع $g(x)$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{1-x}{3} = 6 \rightarrow 1 - x = 18 \rightarrow x = -17 \\ \frac{1-x}{3} = 10 \rightarrow 1 - x = 30 \rightarrow x = -29 \end{cases}$$

دامنهٔ تابع $g(x)$ بازهٔ $[-29,-17]$ است.

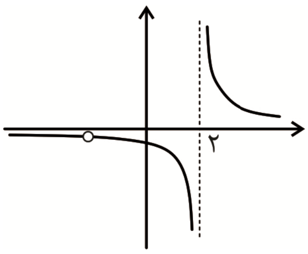
۶. گزینه ۲ درست است.

ضابطهٔ $g(x)$ را می‌یابیم:

$$f(x) - g(x) = \frac{2}{x+1} \rightarrow g(x) = f(x) - \frac{2}{(x+1)} = \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)}$$

$$= \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} - \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{3x-3-2x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{\cancel{x+1}}{(x-2)\cancel{(x+1)}} = \frac{1}{x-2}$$

بزرگ‌ترین دامنهٔ تابع $g(x)$ مجموعهٔ $\mathbb{R} - \{-1,2\}$ است. نمودار تابع را در این مجموعه رسم می‌کنیم.



۷. **گزینه ۱ درست است.**

ضابطهٔ $h(x)$ را می‌یابیم:

$$\left(\frac{f}{g}oh\right)(x)=\frac{(foh)(x)}{(goh)(x)}=2g(x)+1\to\frac{2h(x)+1}{h(x)-3}=2(x-3)+1\to\frac{2h(x)+1}{h(x)-3}=2x-5$$

طرفین مساوی را در $h(x)-3$ ضرب می‌کنیم:

$$2h(x)+1=(2x-5)(h(x)-3)\to$$
$$2h(x)+1=2xh(x)-6x-5h(x)+15\to$$
$$6x-14=2xh(x)-7h(x)\to 6x-14=(2x-7)h(x)\to h(x)=\frac{6x-14}{2x-7}$$

مقدار تابع $h(x)$ به‌ازای $x=\frac{7}{2}$ تعریف نشده است.

۸. **گزینه ۲ درست است.**

دامنهٔ تابع $g(x)$ را می‌یابیم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_f\}=\{-1<x<0\cap -1<3x+1<0\}$$
$$=\left\{-1<x<0\cap -\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{3}\right\}=\left\{-\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{3}\right\}$$

ضابطهٔ تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x)=fof(x)=3(3x+1)+1=9x+4$$

۹. **گزینه ۳ درست است.**

ضابطهٔ تابع وارون $f(x)$ را می‌یابیم:

$$y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\Rightarrow y=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}$$

$\sqrt{x-1}$ را t فرض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{t^2+2t+1}\to y=\sqrt{(t+1)^2}\to y=|t+1|$$

با توجه به $t>0$ می‌توانیم بنویسیم:

$$y=t+1\to y=\sqrt{x-1}+1\to y-1=\sqrt{x-1}\to(y-1)^2=x-1$$
$$\to x=y^2-2y+2\to f^{-1}(x)=x^2-2x+2$$

بنابراین $a=1$، $b=-2$، $c=2$ و $2a+b+c=2$ است.

۱۰. **گزینه ۳ درست است.**

تابع $f(x)$ را y فرض می‌کنیم:

$$f(x)=2g(x)\to y=2g(x)\to g(x)=\frac{y}{2}\to x=g^{-1}(\frac{y}{2})$$

از طرفی $f^{-۱}of(x)=x$ پس:

$$f^{-۱}(f(x))=g^{-۱}(\frac{y}{۲})$$

به‌جای $f(x)$ دوباره y قرار می‌دهیم:

$$f^{-۱}(y)=g^{-۱}(\frac{y}{۲})$$

با تغییر متغیر y به x داریم:

$$f^{-۱}(x)=g^{-۱}(\frac{x}{۲})\rightarrow ۸x^{۳}+۲x=a(\frac{x^{۳}}{۸})+b(\frac{x}{۲})\rightarrow a=۶۴\ ,\ b=۴\rightarrow a+۲b=۶۴+۸=۷۲$$

۱۱. **گزینه ۴ درست است.**

نمودار تابع $y=\frac{f(x)}{[x]}$ را رسم می‌کنیم:

$$-۲\leq x<-۱\rightarrow y=\frac{f(x)}{-۲}$$

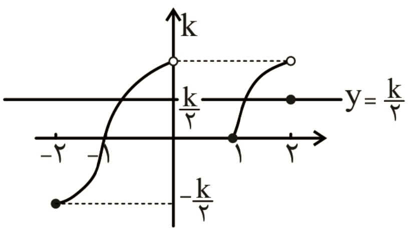
$$-۱\leq x<۰\rightarrow y=\frac{f(x)}{-۱}$$

$۰\leq x<۱\rightarrow$ جزو دامنه نیست

$$۱\leq x<۲\rightarrow y=\frac{f(x)}{۱}$$

$$x=۲\rightarrow y=\frac{f(۲)}{۲}$$

نمودارهای تابع مورد اشاره و خط $y=\frac{-f(۰)}{۲}=\frac{k}{۲}$ را رسم می‌کنیم.

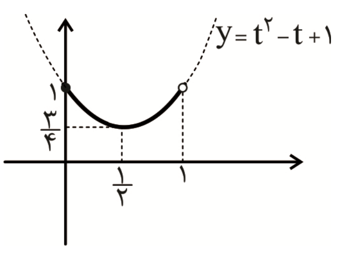


نمودارهای ۲ تابع در سه نقطه متقاطع‌اند.

۱۲. **گزینه ۲ درست است.**

با تغییر متغیر $x-[x]$ به t نمودار تابع $y=t^{۲}-t+۱$ را در دامنهٔ $۰\leq t<۱$ رسم می‌کنیم.

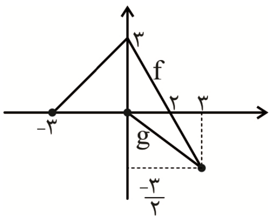
$$x_{s}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۱}{۲(۱)}=\frac{۱}{۲}\rightarrow y_{s}=(\frac{۱}{۲})^{۲}-(\frac{۱}{۲})+۱=\frac{۳}{۴}$$



برد تابع، بازهٔ $\left[\frac{۳}{۴},۱\right]$ است.

۱۳. گزینه ۴ درست است.

ضابطهٔ تابع g و f را پس از محاسبهٔ مقدار تابع‌ها در $x=۴$ محاسبه می‌کنیم.



$$g(x)=-\frac{x}{۲}\qquad (۰\le x\le ۳)$$

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & -۳\le x\le ۰ \\ -\frac{۳}{۲}x+۳ & ۰<x\le ۳ \end{cases}$$

ضابطهٔ $fog(x)$ را می‌یابیم:

$$fog(x)=\begin{cases} -\frac{x}{۲}+۳ & -۳\le -\frac{x}{۲}\le ۰ \;\to\; ۶\ge x\ge ۰ \\ \frac{۳}{۴}x+۳ & ۰<-\frac{x}{۲}\le ۳ \;\to\; ۰>x\ge -۶ \end{cases}$$

اشتراک دامنهٔ تابع اخیر با دامنهٔ تابع $g(x)$ بازهٔ $[۰,۳]$ است.

برد تابع $fog(x)$ روی بازهٔ $[۰,۳]$ برابر بازهٔ $\left[\frac{۳}{۲},۳\right]$ است و برای اینکه خط $y=k$ نمودار تابع $fog(x)$ را قطع کند باید $\frac{۳}{۲}\le k\le ۳$ باشد.

۱۴. گزینه ۲ درست است.

برای محاسبه دامنه $g(x)$؛ زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{f(۳x-۱)-f(۲x)}{f(x)}\ge ۰$$

برای آنکه این کسر بزرگ‌تر مساوی صفر باشد، دو حالت داریم:

(۱) صورت نامنفی و مخرج مثبت

$$\left.\begin{cases} f(۳x-۱)\ge f(۲x)\to ۳x-۱\le ۲x\to x\le ۱ \\ f(x)>۰\to x<۲ \end{cases}\right\}\to \boxed{x\le ۱}$$

(۲) صورت نامثبت و مخرج منفی

$$\left.\begin{cases} f(۳x-۱)\le f(۲x)\to ۳x-۱\ge ۲x\to x\ge ۱ \\ f(x)<۰\to x>۲ \end{cases}\right\}\to \boxed{x>۲}$$

بنابراین دامنه به‌صورت $(-\infty,۱]\cup(۲,+\infty)$ است، پس تنها عدد صحیحی که در دامنه نیست $x=۲$ است.

۱۵. گزینه ۴ درست است.

با توجه به اینکه n عدد صحیح است، حاصل fog و gof را به‌طور مجزا محاسبه می‌کنیم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(x-n[x])=x-n[x]+n\big[x-n[x]\big]=x-n^۲[x]$$

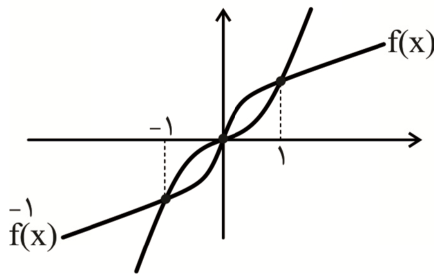
$$gof(x)=g(f(x))=g(x+n[x])=x+n[x]-n\big[x+n[x]\big]=x-n^۲[x]$$

پس به‌ازای هر عدد صحیح n، fog و gof باهم برابرند و جواب گزینه (۴) است.

۱۶. گزینه ۳ درست است.

نمودار تابع f و f^{-1} به‌صورت زیر است و هر دو، تابع اکیداً صعودی هستند.

$$\cancel{f}(f(x)) \geq \cancel{f}(f^{-1}(x)) \to f(x) \geq f^{-1}(x)$$



با توجه به نمودار در بازه $[-۱,۱]$ نمودار $f(x)$ بالاتر از $f^{-1}(x)$ قرار دارد که شامل سه عدد صحیح است.

۱۷. گزینه ۳ درست است.

برای آنکه تابع یک به یک باشد باید شیب هر دو خط هم‌علامت باشد، یعنی:

$$m \times (۳-m) > ۰ \to ۰ < m < ۳$$

پس شیب هر دو مثبت است، پس اگر عدد $x = ۱$ را در معادله بالایی قرار دهیم باید از حالتی که $x = ۱$ را در پایینی قرار می‌دهیم بزرگ‌تر شود، یعنی: $۲ - m \leq m + ۱ \Leftarrow \frac{۱}{۲} \leq m$، پس با اشتراک گرفتن از هر دو شرط داریم: $\frac{۱}{۲} \leq m < ۳$

حال چون m صحیح است، داریم: $m = ۱,۲$. اگر در تابع m را ۱ یا ۲ قرار دهیم $f^{-1}(m+۱)$ برابر ۱ می‌شود.

۱۸. گزینه ۳ درست است.

اعضای مجموعه به‌صورت زیر است:

$$\{(۰,۵),(۰,-۵),(۳,۴),(۳,-۴),(-۳,۴),(-۳,-۴),(۴,۳),(۴,-۳),(-۴,۳),(-۴,-۳),(۵,۰),(-۵,۰)\}$$

که با حذف کردن ۵ زوج مرتب تبدیل به تابع می‌شود.

۱۹. گزینه ۴ درست است.

دو طرف معادله را برابر t قرار می‌دهیم:

$$۲f^{-1}(x) = t \to f^{-1}(x) = \frac{t}{۲} \to x = f(\frac{t}{۲})$$

$$f^{-1}(\frac{۸x+۳}{۴}) = t \to f(t) = \frac{۸x+۳}{۴} \to x = \frac{۴f(t)-۳}{۸}$$

$$\frac{۴f(t)-۳}{۸} = f(\frac{t}{۲}) \to ۴(t^۳+t)-۳ = ۸(\frac{t^۳}{۸}+\frac{t}{۲})$$

$$\to ۴t^۳+۴t-۳ = t^۳+۴t \to ۳t^۳ = ۳ \to t = ۱ \to x = f(\frac{۱}{۲}) = \frac{۵}{۸}$$

۲۰. گزینه ۲ درست است.

به‌دلیل اینکه xها در $\frac{-۵}{۲}$ ضرب شده است، (یعنی $۲x$ به $-۵x$ تبدیل شده است) پس قاعده در $\frac{۲}{۵}$ ضرب می‌شود و برابر $\frac{۸}{۵}$ است و yها در ۳ ضرب شده است (یعنی f به $۳f$ تبدیل شده است) و ارتفاع برابر ۱۵ می‌شود؛ پس مساحت برابر ۱۲ است.

۱- اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x+۱-\sqrt{ax+۱}}{\sqrt[۳]{۳x+۲}-x}=L$ باشد، حاصل $a+۹L$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

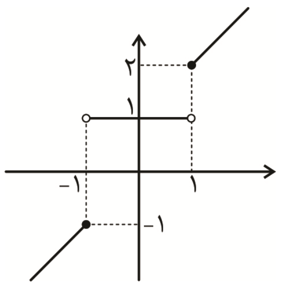
۲- اگر $f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx & , |x-۳|\geq ۱\\ ۱+ax+\dfrac{b}{x} & , |x-۳|<۱\end{cases}$ در اعداد حقیقی مثبت پیوسته باشد، جزء صحیح $\dfrac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۵

۳- حد تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x^۲-۱|}$ در $x=۱$ برابر ۱ است. $a+۲b-c$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۶ ۴) -۸

۴- با توجه به شکل زیر حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f\left(\dfrac{f(x^۲-۲x)+f(۲x-x^۲)}{۲}\right)$ کدام است؟



۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۵- اگر $f(x)=\begin{cases}۳x^۲+۱ & x\leq ۲\\ x^۲-۳ & x>۲\end{cases}$ باشد، تابع fof در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۶- اگر $\lim\limits_{x\to \left(\frac{۲}{۳}\right)^+}\dfrac{[۴\sin^۲\pi x]+ax^۲}{\sqrt{۹x^۲-۱۲x+۴}}$ برابر عدد حقیقی b باشد. مقدار $[a-b]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) -۲ ۲) -۴ ۳) -۳ ۴) -۵

۷- اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{[x]^۲-۱}{۲[-x]+k}$ در $x=۳$ حد داشته باشد، حاصل $[f(k)]$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۴ ۳) -۵ ۴) -۶

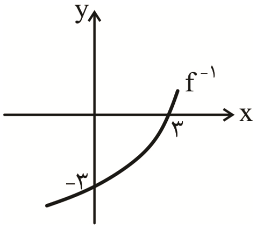
۸- اگر a,b اعداد صحیح و $f(x)=[۲x^۲+ax+b]$ در $x=۱$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=۴$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۹- اگر $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x}{x^۳+ax+b}=+\infty$ باشد $b-a$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۵

۱۰- اگر f^{-1} به شکل زیر و $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x[x]+k}{f(x)}$ برابر $-\infty$ شود، چند مقدار صحیح برای k وجود دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱- تابع f متناوب با دوره تناوب $T=4$ است. اگر ضابطهٔ تابع در بازهٔ $[-2,2)$ به‌صورت $f(x)=3-2|x|$ باشد، حاصل حد $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(-1)^{[x]}}{f(x+3)-f(x-3)}$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $\dfrac{1}{2}$　　۲) $\dfrac{-1}{2}$　　۳) $-\infty$　　۴) $+\infty$

۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{3\pi}{4})^+}\dfrac{\sin 4x}{(1+\tan x)^2}$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) -1　　۳) $-\infty$　　۴) $+\infty$

۱۳- اگر به‌ازای اعداد حقیقی غیر صفر b,a و مثبت a، $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)(x^2-b^2)}=+\infty$ آنگاه $\dfrac{a}{b}$ چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر　　۲) یک　　۳) دو　　۴) سه

۱۴- با حروف کلمه‌های «علی اکبرپور» چند کلمهٔ ده حرفی می‌توان ساخت که حروف اول و آخر یکسان نباشند؟

۱) $43\times 8!$　　۲) $44\times 8!$　　۳) $45\times 8!$　　۴) $46\times 8!$

۱۵- حاصل $\binom{12}{5}+\binom{11}{4}+\binom{11}{3}$ برابر عدد $2^n\times 3^m\times k$ است. مقدار $n+2m$ کدام است؟ (عدد k بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر نیست.)

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۵　　۴) ۶

۱۶- با ارقام متمایز ۵,۴,۳,۲,۱ چند عدد ۵ رقمی فرد می‌توان نوشت که بین دو رقم ۲ و ۴ حداقل یک رقم دیگر باشد؟

۱) ۳۶　　۲) ۱۲　　۳) ۲۴　　۴) ۴۸

۱۷- از شهر تهران ۵ نفر و از شهرهای اصفهان، شیراز، مشهد و تبریز هر کدام ۴ نفر و از کرمان ۲ نفر در اردو هستند. تیم ۳ نفره به چند طریق قابل انتخاب است که در آن افراد همشهری نباشند؟

۱) ۷۹۲　　۲) ۱۰۸۸　　۳) ۶۴۸　　۴) ۹۳۶

۱۸- فرزاد، هستی و نرگس با هشت دوست خود در یک ردیف به چند طریق می‌توانند بنشینند که فرزاد بین هستی و نرگس (نه لزوماً کنار هم) قرار بگیرد؟

۱) $\dfrac{11!}{3!}$　　۲) $\dfrac{11!}{2!}$　　۳) $\dfrac{11!}{3}$　　۴) $11!$

۱۹- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۴۰۲ وجود دارد که در آن رقم ۳ دقیقاً دوبار تکرار شده است؟

۱) ۴۴　　۲) ۴۶　　۳) ۴۸　　۴) ۵۰

۲۰- مجموعهٔ $A=\{1,2,\dots,9\}$ چند زیرمجموعه غیرتهی دارد که تعداد اعضای آن و اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن، مضرب ۳ باشد؟

۱) ۳۹　　۲) ۴۰　　۳) ۴۱　　۴) ۴۲

ریاضی

۱. **گزینه ۴ درست است.**

با توجه به آنکه حاصل حد، متناهی است و مخرج کسر به‌ازای $x=2$ صفر می‌شود، پس باید صورت کسر به‌ازای $x=2$ صفر شود:

$$3-\sqrt{2a+1}=0 \Rightarrow \sqrt{2a+1}=3 \Rightarrow a=4$$

حال حد داده‌شده را به‌ازای $a=4$ محاسبه می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{\sqrt[3]{3x+2}-x}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{\sqrt[3]{3x+2}-x}\times\frac{x+1+\sqrt{4x+1}}{x+1+\sqrt{4x+1}}\times\frac{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+x\sqrt[3]{3x+2}+x^2}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+x\sqrt[3]{3x+2}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-(4x+1)}{3x+2-x^3}\times\frac{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+x\sqrt[3]{3x+2}+x^2}{x+1+\sqrt{4x+1}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{-x^3+3x+2}\times\frac{12}{6}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2)}{-(x-2)(x^2+2x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{-(x^2+2x+1)}=\frac{-4}{9}$$

بنابراین:

$$a+9L=4+9\times\frac{-4}{9}=4+(-4)=0$$

۲. **گزینه ۴ درست است.**

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & ,|x-3|\geq 1 \\ 1+ax+\dfrac{b}{x} & ,|x-3|<1 \end{cases}$$

از شرط‌های دامنه، نقاط مرزی $x=2,4$ هستند؛ زیرا:

$$|x-3|<1 \Rightarrow -1<x-3<1 \Rightarrow 2<x<4$$
$$|x-3|\geq 1 \Rightarrow x-3\geq 1 \quad \text{یا} \quad x-3\leq 1 \Rightarrow x\geq 4 \quad \text{یا} \quad x\leq 2$$

پس شرط پیوستگی (تساوی حد و مقدار) در $x=2$ و $x=4$ را می‌نویسیم:

$$x=2: 4a+2b=1+2a+\frac{b}{2} \Rightarrow 2a+\frac{3b}{2}=1$$

$$x=4: 16a+4b=1+4a+\frac{b}{4} \Rightarrow 12a+\frac{15}{4}b=1$$

$$\xrightarrow{\times 6}\begin{cases} 12a+9b=6 \\ 12a+\dfrac{15}{4}b=1 \end{cases} \xrightarrow{-} \frac{21}{4}b=5 \Rightarrow b=\frac{20}{21}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} a=\frac{-3}{14}$$

پس داریم:

$$\left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{\frac{20}{21}}{\frac{-3}{14}}\right]=\left[-\frac{20\times 14}{3\times 21}\right]=\left[-\frac{20\times 2}{3\times 3}\right]=\left[\underbrace{-\frac{40}{9}}_{\text{بین } -4 \text{ و } -5}\right]=-5$$

۳. **گزینه ۴ درست است.**

برای اینکه تابع $f(x)$ بتواند در $x=1$ حد داشته باشد باید:

$$f(x)=\frac{\sqrt{ax^{2}+bx+c}}{|x^{2}-1|}=\frac{\sqrt{a(x-1)^{2}}}{|x-1||x+1|}=\frac{\sqrt{a}\,|x-1|}{|x-1||x+1|}$$

اکنون حد تابع را در $x=1$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a}\,\cancel{|x-1|}}{\cancel{|x-1|}\,|x+1|}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{a}}{|x+1|}=\frac{\sqrt{a}}{2}=1\to a=4$$

$$ax^{2}+bx+c=a(x-1)^{2}=4(x-1)^{2}=4x^{2}-8x+4\to\begin{cases}a=4\\ b=-8\\ c=4\end{cases}\to a+2b+c=-8$$

۴. **گزینه ۴ درست است.**

با توجه به نمودار داریم:

$$f(x^{2}-2x)=f\left((x-1)^{2}-1\right)=f\left((-1)^{+}\right)=1 \quad \text{(مطلق)}$$

$$f(2x-x^{2})=f\left(1-(x-1)^{2}\right)=f(1^{-})=1 \quad \text{(مطلق)}$$

بنابراین؛ حد خواسته‌شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 1} f\left(\frac{f(x^{2}-2x)+f(2x-x^{2})}{2}\right)=f\left(\frac{1+1}{2}\right)=f(1)=2$$

۵. **گزینه ۳ درست است.**

پیوستگی تابع را در $x=2$ بررسی می‌کنیم:

$$f(2)=13$$

$$\lim_{x\to 2^{+}} f(x)=\lim_{x\to 2^{+}}(x^{2}-3)=1$$

$$\lim_{x\to 2^{-}} f(x)=\lim_{x\to 2^{-}}(3x^{2}+1)=13$$

پس تابع f در $x=2$ ناپیوسته است. علاوه‌بر $x=2$، نقاط ناپیوستگی تابع fof به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}x\le 2: 3x^{2}+1=2\Rightarrow x^{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\\ x>2: x^{2}-3=2\Rightarrow x^{2}=5\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}\xrightarrow{\text{با شرط } x>2} x=\sqrt{5}\end{cases}$$

بنابراین تابع fof در ۴ نقطه ناپیوسته است.

۶. **گزینه ۳ درست است.**

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}^{+}}\frac{[4\sin^{2}\pi x]+ax^{2}}{\sqrt{9x^{2}-12x+4}}$$

وقتی $x\to\frac{2}{3}^{+}$ میل می‌کند، کمان به‌سمت $\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{+}$ می‌رود که سینوس آن کمی از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ کمتر است. (سینوس در اطراف $\frac{2\pi}{3}$ نزولی است.)

پس:

$$x\to\frac{2}{3}^{+}\to\sin\pi x\to\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-}\Rightarrow 4\sin^{2}\pi x\to 4\left(\frac{3}{4}\right)^{-}$$

یعنی درون براکت از ۳ کمی کمتر است و حاصل جزء صحیح می‌شود ۲.

از طرفی در مخرج $|۳x-۲|=\sqrt{(۳x-۲)^۲}$ را داریم که در سمت راست $x=\frac{۲}{۳}$ داخل قدرمطلق مثبت است و خودش بیرون می‌آید. تا اینجا داریم:

$$\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}\frac{۲+ax^۲}{۳x-۲}=b$$

در $x=\frac{۲}{۳}$ چون حد مخرج صفر است، پس حد صورت هم باید صفر باشد:

$$\Rightarrow ۲+\frac{۴}{۹}a=۰\Rightarrow a=-\frac{۹}{۲}$$

و حاصل حد می‌شود:

$$\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}\frac{۲-\frac{۹}{۲}x^۲}{۳x-۲}=\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}\frac{\frac{۱}{۲}(۴-۹x^۲)}{-(۲-۳x)}$$

$$b=\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}-\frac{۱}{۲}\frac{\cancel{(۲-۳x)}(۲+۳x)}{\cancel{۲-۳x}}=\lim_{x\to\frac{۲}{۳}}-\frac{۱}{۲}(۲+۳x)=-۲$$

و بنابراین:

$$[a-b]=[-\frac{۹}{۲}+۲]=\left[\frac{-۵}{۲}\right]=-۳$$

۷. گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=\frac{[x]^۲-۱}{۲[-x]+k}$$

۳^- یعنی حدوداً ۲/۹ و برای ۳^+ هم ۳/۱ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\frac{۳^۲-۱}{۲(-۴)+k}=\frac{۸}{k-۸}$$

$$\lim_{k\to ۳^-}f(x)=\frac{۲^۲-۱}{۲(-۳)+k}=\frac{۳}{k-۶}$$

پس با توجه به اینکه f در ۳ حد دارد:

$$\frac{۸}{k-۸}=\frac{۳}{k-۶}\Rightarrow ۸k-۴۸=۳k-۲۴\Rightarrow ۵k=۲۴\Rightarrow k=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{[x]^۲-۱}{۲[-x]+۴/۸}$$

و داریم:

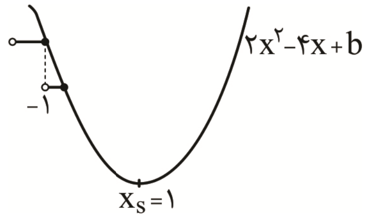
$$[۴/۸]=۴$$
$$[-۴/۸]=-۵$$

$$f(k)=f(۴/۸)=\frac{۴^۲-۱}{۲(-۵)+۴/۸}=\frac{۱۵}{-۵/۲}=-\frac{۱۵۰}{۵۲}=-\frac{۷۵}{۲۶}\Rightarrow[f(k)]=[\underbrace{-\frac{۷۵}{۲۶}}_{\text{بین ۲- و ۳-}}]=-۳$$

۸. **گزینه ۱ درست است.**

در $x=1$ حد درون براکت برابر $2+a+b$ می‌شود، که عددی صحیح است، اما با توجه به‌صورت سؤال براکت حد دارد، پس حتماً $x=1$ طول رأس سهمی است و داریم:

$$x_s=\frac{-a}{2(2)}=1\Rightarrow a=-4$$



حالا چون سهمی در همسایگی ۱− نزولی است داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=f(-1)-1=4$$

$$\Rightarrow f(-1)=2+4+b=5\to b=-1$$

پس داریم: $f(x)=[2x^2-4x-1]$

و بنابراین: $\lim_{x\to 4^-} f(x)=f(4)-1=14 \xrightarrow{\text{در همسایگی ۴}}$ در همسایگی ۴ صعودی است.

۹. **گزینه ۳ درست است.**

$$\lim_{x\to-2}\frac{x}{x^3+ax+b}=+\infty$$

حد صورت ۲- است، پس مخرج باید در $x=-2$ از دو طرف 0^- شود؛ یعنی در تجزیه مخرج $(x+2)^2$ داریم و مخرج بر x^2+4x+4 بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{l|l} x^3+ax+b & x^2+4x+4 \\ \hline \underline{x^3+4x^2+4x} & x-4 \\ -4x^2+(a-4)x+b & \\ \underline{-4x^2-16x-16} & \\ (a+12)x+b+16=0\Rightarrow a=-12\,,\ b=-16 & \end{array}$$

پس مخرج $(x-4)(x+2)^2$ می‌شود که در ۲- از دو طرف 0^- است.

بنابراین: $b-a=-4$

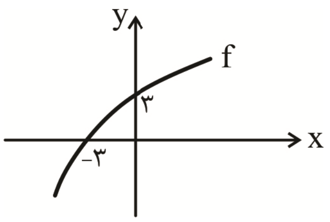
راه دوم: تجزیه مخرج $(x+2)^2(x+k)$ است و باید k طوری انتخاب شود که در ضرب $(x^2+4x+4)(x+k)$ عبارت شامل x^2 نداشته باشیم، پس: $kx^2+4x^2=0\Rightarrow k=-4$

و حالا: $x^3+ax+b=(x^2+4x+4)(x-4)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ضریب } x:\ 4(-4)+4=-12=a \\ \text{عدد ثابت}:\ 4(-4)=-16=b\end{array}\right\}\Rightarrow b-a=-4$$

۱۰. **گزینه ۲ درست است.**

f به شکل روبه‌رو است:



و حد راست و چپ آن در ۳- به‌ترتیب 0^+ و 0^- هستند، پس:

حد راست: $\lim_{x\to(-3)^+}\frac{x[x]+k}{f(x)}=\frac{(-3)(-3)+k}{0^+}=\frac{k+9}{0^+}$

برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود باید صورت منفی باشد پس $k+9<0$ و بنابراین $k<-9$

حد چپ: $\lim_{x\to(-3)^-}\frac{x[x]+k}{f(x)}=\frac{(-3)(-4)+k}{0^-}=\frac{k+12}{0^-}$

برای رسیدن به‌حاصل $-\infty$ در این حد، باید $k+12>0$ باشد، پس: $k>-12$ و بنابراین با توجه بـه شـرط قبلـی، عـدد صحیح k می‌تواند -11 یا -10 باشد یعنی دو مقدار دارد.

۱۱. گزینه ۳ درست است.

ابتدا حد چپ را در $x=2$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x+3)-f(x-3)}=\frac{(-1)^{[2^-]}}{f(5^-)-f\left((-1)^-\right)}=\frac{(-1)^1}{f(1^-)-f\left((-1)^-\right)}=\frac{-1}{1^+-1^-}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

حال حد راست را در $x=2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x+3)-f(x-3)}=\frac{(-1)^{[2^+]}}{f(5^+)-f\left((-1)^+\right)}=\frac{(-1)^2}{f(1^+)-f\left((-1)^+\right)}=\frac{1}{1^--1^+}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

بنابراین؛ حد خواسته‌شده برابر با $-\infty$ است.

۱۲. گزینه ۳ درست است.

ابتدا حد داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin 4x}{(1+\tan x)^2}=\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin 4x}{\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}=\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin 4x}{\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin 4x}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin 4x}{1+\sin 2x}\times\cos^2 x$$

$$=\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin 4x}{1+\sin 2x}\times\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2=\lim_{x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin 4x}{2(1+\sin 2x)}$$

با تغییر متغیر $t=x-\frac{3\pi}{4}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin 4\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(1+\sin 2(t+\frac{3\pi}{4})\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(3\pi+4t)}{2+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2t\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\sin 4t}{2-2\cos 2t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{-4\sin t\cos t\cos 2t}{4\sin^2 t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\cos t\cos 2t}{\sin t}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

۱۳. گزینه ۳ درست است.

برای اینکه حاصل حد در $x=a$ به $+\infty$ میل کند باید مخرج ریشهٔ مضاعف $x=a$ داشته باشد.

$$\frac{1}{(x-a)(x^2-b^2)}=\frac{1}{(x-a)(x-b)(x+b)}$$

یا $a=b$ است که کسر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{(x-a)^2(x+a)}$$

یا $a=-b$ است که کسر به‌صورت زیر درمی‌آید: $\frac{1}{(x-a)^2(x+a)}$

در مجموع $\frac{a}{b}=\pm1$ و دارای ۲ مقدار است.

۱۴. گزینه ۲ درست است.

دو حرف تکراری «ر» داریم. ابتدا تعداد کل کلمه‌های ده حرفی را محاسبه می‌کنیم: $\frac{10!}{2!}$

حال تعداد کلمه‌های ده حرفی که در حرف «ر» اول و آخر آن قرار داشته باشند را محاسبه می‌کنیم: $8!$

تعداد حالات اخیر را از $\frac{10!}{2!}$ کم می‌کنیم. $\frac{10!}{2!}-8!=\frac{10\times9}{2}\times8!-8!=45\times8!-8!=44\times8!$

۱۵. گزینه ۱ درست است.

با توجه به رابطهٔ $\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\binom{11}{3}+\binom{11}{4}=\binom{12}{4}$$

$$\binom{12}{4}+\binom{12}{5}=\binom{13}{5}=\frac{13!}{5!\times8!}=\frac{13\times\cancelto{3}{12}\times11\times\cancelto{2}{10}\times\cancelto{3}{9}}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{5}}$$

$$=13\times3\times11\times3=3^2\times11\times13=3^2\times2^0\times11\times13\to\begin{cases}m=2\\n=0\end{cases}\Rightarrow n+2m=0+4=4$$

۱۶. گزینه ۱ درست است.

راه اول: رقم یکان لزوماً ۱ یا ۳ یا ۵ است، پس ۱ رقم فرد در یکان مصرف‌شده (۳ حالت) و از بین دو رقم فرد دیگر، حداقل یکی بین ۲ و ۴ است. حالت‌های زیر را داریم:

فرد ۲ فرد ۴ $\frac{\text{فرد}}{\text{یکان}}$ یا ۲ فرد فرد ۴ $\frac{\text{فرد}}{\text{یکان}}$

$$3\times(2\times2!\times2+2!\;2!)=3\times(8+4)=36$$

رقم فرد یکان

رقم فرد بیرون

درون دسته برای ۲ و ۴

جای دسته نسبت به فرد بیرون

فردها درون دسته

۲ و ۴ درون دسته

راه دوم: یک رقم فرد در یکان است: ۳ حالت

حالا ۴ رقم دیگر $4!=24$ حالت دارند که حالت $\frac{\text{فرد}}{\text{یکان}}$ ۴ و ۲ فرد فرد قبول نیست، پس:

$$3\times(24-2!\times3!)=3\times12=36$$

۲ و ۴ درون دسته

۲ و ۴ در کنار دو فرد دیگر

۱۷. گزینه ۲ درست است.

ترکیب‌های مورد قبول عبارت‌اند از:

یک تهرانی و دو نفر غیرهمشهری از شهرهای ۴ نفری:

$$\underset{\text{نفر تهران}}{\binom{5}{1}}\times\underset{\text{شهر}}{\binom{4}{2}}\underset{\text{نفر}}{\binom{4}{1}}\underset{\text{نفر}}{\binom{4}{1}}=480$$

یک تهرانی و یک کرمانی و یک نفر از شهرهای ۴ نفری:

$$\begin{array}{cccc}\text{تهران} & \text{شهر} & \text{نفر} & \text{نفر کرمان}\\ \binom{۵}{۱} & \binom{۴}{۱} & \binom{۴}{۱} & \binom{۲}{۱}\end{array}=۱۶۰$$

سه نفر از شهرهای ۴ نفری:

$$\begin{array}{cccc}\text{شهر} & \text{نفر} & \text{نفر} & \text{نفر}\\ \binom{۴}{۳} & \binom{۴}{۱} & \binom{۴}{۱} & \binom{۴}{۱}\end{array}=۲۵۶$$

یک کرمانی و دو نفر غیرهمشهری از شهرهای ۴ نفری:

$$\begin{array}{ccccc}\text{کرمان} & & \text{شهر} & \text{نفر} & \text{نفر}\\ \binom{۲}{۱} & \times & \binom{۴}{۲} & \binom{۴}{۱} & \binom{۴}{۱}\end{array}=۱۹۲$$

پس جمعاً ۱۰۸۸ حالت داریم.

۱۸. گزینه ۳ درست است.

یکی از حالت‌های ممکن را می‌نویسیم:

** هستی *** فرزاد * نرگس **

تعداد کل جایگشت‌ها $!۱۱$ است که آن را بر جایگشت‌های هستی، نرگس و فرزاد یعنی $!۳$ تقسیم می‌کنیم و چون هستی و نرگس می‌توانند باهم جابه‌جا شوند تعداد حالات را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۱۱!}{۳!}\times ۲=\frac{۱۱!}{۶}\times ۲=\frac{۱۱!}{۳}$$

۱۹. گزینه ۳ درست است.

چهار مکان برای قرار دادن ارقام در نظر می‌گیریم. رقم صفر هم می‌تواند در سمت چپ قرار بگیرد. برای مثال عدد ۰۳۲۳، یک عدد سه‌رقمی و مورد قبول است. رقم ۳ در سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد؛ زیرا عدد، بزرگ‌تر از ۱۴۰۲ می‌شود، پس ۳ حالت برای قرار گرفتن دو رقم ۳ داریم:

حالت اول: - ۳۳ -

حالت دوم: ۳ - ۳ -

حالت سوم: ۳ ۳- -

در حالت اول و دوم رقم سمت چپ حتماً باید صفر یا ۱ باشد (۲ حالت). در این صورت عدد حاصل حتماً کمتر از ۱۴۰۲ خواهد بود؛ بنابراین یک رقم باقی‌مانده هر مقداری (به‌جز ۳) می‌تواند داشته باشد (۹ حالت). پس هر کدام از حالت‌های اول و دوم $۱۸=۹\times۲$ مقدار مورد قبول دارند.

در حالت سوم دو رقم سمت چپ می‌توانند از ۰۰ تا ۱۳ باشند؛ به‌جز ۰۳ و ۱۳ (۱۲ حالت).

پس کل اعداد برابر است با:

$$\text{کل اعداد}=۱۸+۱۸+۱۲=۴۸$$

راه دوم: اعداد مورد نظر حالت‌های زیر را دارند:

$$\begin{array}{ccccccc}۳۳\,,-۳۳ & ۳-۳ & ۳۳- & ۱۳۳- & ۱۳-۳ & ۱-۳۳\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ \text{۸ تا} & \text{۹ تا} & \text{۹ تا} & \text{۹ تا} & \text{۹ تا} & \text{۳ تا}\end{array}$$

پس روی هم ۴۸ حالت داریم.

۲۰. گزینه ۴ درست است.

اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو می‌تواند ۳ یا ۶ باشد. درحالتی‌که اختلاف ۳ باشد، کوچک‌ترین عضو می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ باشد. در این حالت زیرمجموعه باید ۳ عضوی باشد. یعنی علاوه‌بر دو عضو کوچک‌تر و بزرگ‌تر یک عضو هم از اعداد بین این دو باید انتخاب شود؛ بنابراین تعداد این حالات برابر است با:

$$۶\times\binom{۲}{۱}=۱۲$$

درحالتی‌که اختلاف ۶ باشد، کوچک‌ترین عضو می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ باشد. در این حالت زیرمجموعه می‌تواند ۳ یا ۶ عضوی باشد. یعنی علاوه‌بر عضوهای کوچک‌تر و بزرگ‌تر باید ۱ یا ۴ عضو دیگر از اعداد بین این دو انتخاب کنیم؛ بنابراین تعداد زیرمجموعه‌ها در این حالت برابر است با:

$$۳\times\left(\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۴}\right)=۳(۵+۵)=۳۰$$

درنهایت تعداد کل زیرمجموعه‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد کل زیرمجموعه‌ها}=۱۲+۳۰=۴۲$$

۱- اگر $A=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{Z},a^۲+b^۲\le ۸\}$ ، $B=\left\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R},\frac{a^۲}{b}=۲a-b\right\}$ و $C=\{(۲a,b)|a,b\in\mathbb{Z},ab=۲\}$ باشد، آنگاه $(A\cap B)\cup C$ چند عضو دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲- اگر $A=(۱,۴)$ و $B=(k-۱,k+۱)$ و حداقل یکی از دو مجموعهٔ $B-A$ و $A-B$ متناهی باشند، چند مقدار طبیعی برای k وجود دارد؟ازمون وی ای پی

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۳- در دنبالهٔ درجهٔ دوم $...,۳,۱۳,۲۹,۵۱$ ، اختلاف جملات دهم و یازدهم کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۶۴ ۳) ۸۱ ۴) ۱۲۸

۴- جملات اول و دوم و چهارم در یک الگوی درجه ۲ به‌ترتیب ۵، ۸ و ۲۰ هستند. اختلاف جملات چهلم و چهل‌ودوم آن، از نزدیک‌ترین عدد مربع کامل چقدر فاصله دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵- دو دنبالهٔ حسابی $a_n:۱۰۰,۹۷,۹۴,...$ و $b_n:۱,۵,۹,۱۳,...$ چند جملهٔ مشترک دارند؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۶- اگر چهار ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $x^۴+۹=ax^۲$ دنبالهٔ حسابی بسازند، مجموع قدرمطلق این ۴ ریشه چقدر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۷- α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x-۱=۰$ هستند. اگر $\sqrt[۳]{\alpha}+\sqrt[۳]{\beta}=k$ باشد، مقدار k کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

۸- مثلث با رئوس $A(\alpha,۱),B(۳,۲),C(-۱,۳)$ در رأس A قائم‌الزاویه است $(\alpha>۰)$. شیب میانه وارد بر وتر چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) $-۰/۵$ ۲) $-۰/۶$ ۳) $-۰/۷۵$ ۴) $-۱/۲۵$

۹- مختصات قرینه نقطه $A(۱,-۱)$ نسبت به خط $۳x-y=۲$ به‌صورت $A''(\alpha,\beta)$ است. $\alpha\beta$ کدام است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۲

۱۰- اگر α ریشهٔ معادلهٔ $\frac{۱}{x+۳}+\frac{۱}{x+۱}=\frac{۱}{x+۴}+\frac{۱}{x}$ باشد، مقدار $\left[\frac{۳\alpha+۱}{\alpha}\right]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۱- سارای و عسل با هم کاری را در ۱۰ روز انجام می‌دهند. می‌دانیم عسل همهٔ کار را در ۳۰ روز می‌تواند تمام کند. اگر ۶ روز عسل و ۵ روز سارای به تنهایی کار کند، چه بخشی از کار انجام می‌شود؟

۱) $\frac{۶}{۱۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۵}$

۱۲- معادلهٔ $\frac{\sqrt{x-۱}}{b}=\frac{۱}{x+\sqrt{x-۱}}-\frac{۱}{x-\sqrt{x-۱}}$ دو جواب برای x به‌دست می‌آید، b کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $۲-\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}-۱$ ۴) $\sqrt{۵}-۲$

۱۳- حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۹+\sqrt[۳]{x^۲+x+۱}+x=۰$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۴ ۳) -۷ ۴) ریشه ندارد.

۱۴- مقادیر تابع f در جدول زیر آمده است. بهترین تخمین برای $f'(1)$ کدام است؟

x	۰/۸	۰/۹	۱	۱/۱	۱/۴
y	۵	۶	۸	۹	۱۲

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۱۵- اگر $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+2}$، آنگاه حاصل حد $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4f(x)-x^2f(2)}{x-2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{-2}{9}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۶- دو تابع مشتق‌پذیر f و g با دامنه $\mathbb{R}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $g'(x)=-f(x)$ و $f'(x)=g(x)$ آنگاه مقدار مشتق تابع $(f^2+g^2)(x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر

۳) -1 ۴) $+1$ یا -1

۱۷- تابع $f(x)=|x^2+3x-4|+ax^2$ و تابع $g(x)=ax^2+bx+c$ مفروض هستند، تابع $f\times g$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) صفر ۴) -3

۱۸- اگر $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}+1$ و تابع با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\geq 2 \\ x^2f'(x) & , 0<x<2 \end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۱ ۴) ۰/۱۴

۱۹- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$، روی بازهٔ $[2,2+h]$ برابر $\dfrac{6}{5}$ است. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در وسط این بازه کدام است؟

۱) $\frac{95}{81}$ ۲) $\frac{101}{81}$ ۳) $\frac{91}{81}$ ۴) $\frac{97}{81}$

۲۰- شیب‌های خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ روی بزرگ‌ترین دامنه‌اش، در بازهٔ (a,b) قرار می‌گیرند. مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

ریاضی

۱. گزینه ۲ درست است.

برای مجموعه B داریم:

$$\frac{a^2}{b}=2a-b\Rightarrow a^2=2ab-b^2\Rightarrow a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=0\Rightarrow a=b(b\neq 0)$$

بنابراین مجموعه B شامل همه زوج مرتب‌ها با مولفهٔ اول و دوم برابر است. (به‌جز صفر)

بنابراین $A\cap B$ برابر با مجموعه‌ای با شرط $\left\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{Z},a=b,a^2+b^2\leq 8\right\}$ خواهد بود، پس داریم:

$$A\cap B=\left\{(-2,-2),(-1,-1),(1,1),(2,2)\right\}$$

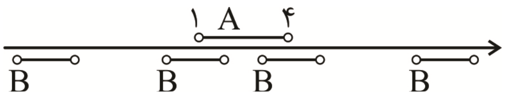
حال مجموعه C را می‌نویسیم:

$$C=\left\{(2,2),(4,1),(-2,-2),(-4,-1)\right\}$$

بنابراین $(A\cap B)\cup C$ دارای ۶ عضو است.

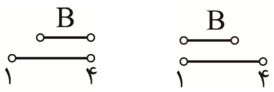
۲. گزینه ۴ درست است.

بازهٔ $A=(1,4)$ و بازهٔ B به طول ۲ را روی محور ببینید.



در تمام این حالت‌ها هم $A-B$ و هم $B-A$ بازه‌های باز و نامتناهی هستند.

اما درحالتی‌که دو بازه نسبت به هم به‌صورت روبه‌رو باشند، یکی از تفاضل‌ها تُهی است.



پس باید $1\leq k-1$ و $k+1\leq 4$ باشد.

یعنی $2\leq k\leq 3$ که در بین جواب‌های k، دو مقدار طبیعی داریم:

$$k=2 \quad \text{یا} \quad k=3$$

۳. گزینه ۲ درست است.

دنباله: $3,13,29,51,\ldots$

اختلاف اول: $10,16,22,\ldots$

اختلاف دوم: $6,6,6,\ldots$

در دنبالهٔ درجهٔ دوم an^2+bn+c، اختلاف دوم ثابت و برابر $2a$ است.

در این دنباله اختلاف دوم برابر ۶ و درنتیجه $a=3$

جمله صفرم (چنین جمله‌ای وجود ندارد، اما اگر فرض کنیم جمله‌ای قبل از جمله اول وجود دارد، آن را جمله صفرم می‌نامیم) نیز برابر -1 است. بنابراین $c=-1$

با جایگذاری $n=1$، مقدار b را به‌دست می‌آوریم:

$$n=1\Rightarrow 3+b-1=3\Rightarrow b=1$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنباله به‌صورت $3n^2+n-1$ خواهد بود.

حال خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(3(121)+11-1\right)-\left(3(100)+10-1\right)=64$$

۴. گزینه ۳ درست است.

در الگوی درجهٔ دوم، افزایش‌ها دنبالهٔ حسابی می‌سازند:

$$5\xrightarrow{+3}8\xrightarrow{+3+d}x\xrightarrow{+3+2d}20$$

$$8+3+d+3+2d=20\Rightarrow 3d=6\Rightarrow d=2$$

یعنی:

$$5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+7} 20$$

می‌دانیم در دنبالهٔ an^2+bn+c ضریب a برابر نصف d است: $a=\frac{d}{2}=1$

پس جملهٔ عمومی n^2+bn+c است و داریم:

$$\xrightarrow{n=1} 1+b+c=5$$

$$\xrightarrow{n=2} 4+2b+c=8 \xrightarrow{\ominus} 3+b=3 \Rightarrow b=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} c=4$$

یعنی $a_n=n^2+4$ و اختلاف جملات چهلم و چهل‌ودوم می‌شود:

$$a_{42}-a_{40}=42^2+4-(40^2+4)=42^2-40^2=(42-40)(42+40)=2\times 82=164$$

که از ۱۶۹، ۵ تا فاصله دارد.

راه دوم: جملهٔ عمومی را an^2+bn+c در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{aligned}&\xrightarrow{n=1} a+b+c=5\\ &\xrightarrow{n=2} 4a+2b+c=8\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\ominus} 3a+b=3$$

$$\left.\begin{aligned}&4a+2b+c=8\\ &\xrightarrow{n=4} 16a+4b+c=20\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\ominus} 12a+2b=12 \xrightarrow{\div 2} 6a+b=6$$

$$\left.\begin{aligned}&3a+b=3\\ &6a+b=6\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{aligned}&a=1\\ &b=0\end{aligned}$$

و ادامه ماجرا مثل راه اول است.

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} c=4 \Rightarrow a_n=n^2+4$$

راه سوم: تفاضل جملات متوالی اعداد ۳، ۵، ۷ و ... است، یعنی $a_n-a_{n-1}=2n-1$

پس $a_{41}-a_{40}=81$ و $a_{42}-a_{41}=83$ و جمع آن‌ها می‌شود $a_{42}-a_{40}=164$

۵. **گزینه ۱ درست است.**

$$a_n: 100, 97, 94, \dots \qquad a_1=100 \qquad d=-3$$

$$b_n: 1, 5, 9, 13, \dots \qquad b_1=1 \qquad d=4$$

با کمی دقت، در دنبالهٔ a_n جمله‌ای برابر ۱ داریم. در واقع آخرین جملهٔ مثبت در دنبالهٔ a_n، $a_{34}=100-99=1$ است و پس از آن جملات a_n منفی می‌شوند. پس عدد ۱ کوچک‌ترین جمله مشترک است.

از طرف دیگر چون قدرنسبت‌ها مقادیر ۳ و ۴ دارند، جملات مشترک با قدرنسبت ۱۲ ایجاد می‌شوند. پس جملات مشترک عبارت‌اند از: (با شروع از ۱ و قدرنسبت ۱۲، تا عدد ۱۰۰ می‌رویم)

$$c_1=1 \qquad 1, 13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97$$

$$d=12$$

به بیان دیگر: جملهٔ عمومی مشترک‌ها $c_n=1+12(n-1)$ یعنی $c_n=12n-11$ است که به‌ازای $n=1$ تا $n=9$، در فاصله ۱ تا ۱۰۰ قرار می‌گیرد، یعنی ۹ جمله مشترک داریم.

۶. **گزینه ۲ درست است.**

$$x^4-ax^2+9=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-at+9=0$$

از این معادله باید دو جواب مثبت برای t به‌دست بیاید. آنگاه:

$$\begin{matrix} t = x^2 = t_1 \\ t = x^2 = t_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{t_1} \\ x_2 = -\sqrt{t_1} \\ x_3 = \sqrt{t_2} \\ x_4 = -\sqrt{t_2} \end{cases}$$

پس باید اعداد $\sqrt{t_1}, \underbrace{\sqrt{t_2}}_{C}, \underbrace{-\sqrt{t_2}}_{B}, \underbrace{-\sqrt{t_1}}_{A}$ دنبالهٔ حسابی بسازند:

$$2B = A + C \Rightarrow -2\sqrt{t_2} = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} \Rightarrow \sqrt{t_1} = 3\sqrt{t_2} \Rightarrow t_1 = 9t_2$$

یعنی در معادلهٔ $t^2 - at + 9 = 0$ باید ریشه بزرگ‌تر ۹ برابر ریشه کوچک‌تر باشد.

$$\left.\begin{matrix} t_1 + t_2 = S = a \\ t_1 t_2 = P = 9 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{t_1 = 9t_2} \begin{cases} 10t_2 = a \\ 9t_2^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow t_2 = 1 \Rightarrow a = 10$$

پس معادله به‌صورت $t^2 - 10t + 9 = 0$ است که ریشه‌های $t = 1, 9$ دارد.

یعنی $x = \pm 1$ و $x = \pm 3$ که دنبالهٔ حسابی $-3, -1, 1, 3$ را می‌سازند و جمع قدرمطلق ریشه‌ها می‌شود $3 + 1 + 1 + 3 = 8$

۷. **گزینه ۴ درست است.**

طرفین معادلهٔ $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = k$ را به توان ۳ می‌رسانیم.

$$\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = k \to \alpha + \beta + 3\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta}(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}) = k^3$$

به‌جای $\alpha + \beta = 4$ و $\alpha\beta = P = -1$ جایگذاری می‌کنیم.

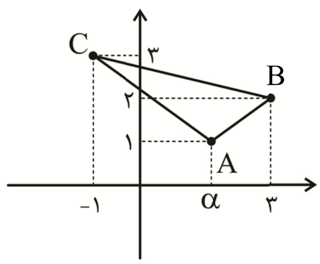
$$4 + 3\sqrt[3]{-1}(k) = k^3 \to 4 - 3k = k^3 \to k^3 + 3k - 4 = 0$$

$k = 1$ ریشهٔ معادلهٔ بالاست.

۸. **گزینه ۳ درست است.**

$$A(\alpha, 1), B(3, 2), C(-1, 3)$$

باید $\hat{A} = 90^\circ$ باشد، پس $AC \perp AB$ پس شیب‌های آن در رابطه $m_{AC} \times m_{AB} = -1$ صدق می‌کنند.



$$m_{AC} = \frac{3-1}{-1-\alpha} \ , \ m_{AB} = \frac{2-1}{3-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{-1-\alpha} \times \frac{1}{3-\alpha} = -1 \Rightarrow 2 = (\alpha+1)(3-\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = -2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \xrightarrow{\text{روش دلتا}} \alpha = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 1 + \sqrt{2}$$

نقطه M در وسط وتر BC قرار دارد: $M = \frac{B+C}{2} = (1, \frac{5}{2})$

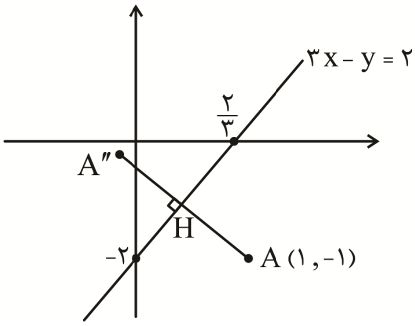
پس شیب AM برابر است با:

$$\xrightarrow[M(1,\frac{5}{2})]{A(1+\sqrt{2},1)} m_{AM} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{1 - (1 + \sqrt{2})} = \frac{\frac{3}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4}$$

که $-\frac{3}{4}$ برابر $\sqrt{2}$ است.

۹. گزینه ۱ درست است.

معادلهٔ خطی که از A بر این خط عمود شود می‌نویسیم:



$$۳x-y=۲ \Rightarrow m=۳ \Rightarrow m'=-\frac{۱}{۳}$$

$$\text{معادلهٔ خط}: y-(-۱)=\frac{-۱}{۳}(x-۱) \Rightarrow x+۳y=-۲$$

نقطه H در محل برخورد این دو خط قرار دارد:

$$\begin{cases} ۳x-y=۲ \\ x+۳y=-۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x=۰/۴\ ,\ y=-۰/۸$$

حالا قرینه نقطه A نسبت به H جواب مسئله است:

$$A''=۲H-A=\left(۲\times۰/۴-۱\ ,\ ۲(-۰/۸)-(-۱)\right)$$
$$A''=(-۰/۲\ ,\ -۰/۶)$$

پس:

$$\alpha\beta=۰/۱۲$$

۱۰. گزینه ۴ درست است.

از طرفین مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(x+۴)+x}{x(x+۴)}=\frac{(x+۳)+(x+۱)}{(x+۱)(x+۳)} \to \frac{۲x+۴}{x^۲+۴x}=\frac{۲x+۴}{x^۲+۴x+۳}$$

با فرض $۲x+۴\neq ۰$ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\frac{۱}{x^۲+۴x}=\frac{۱}{x^۲+۴x+۳} \to x^۲+۴x=x^۲+۴x+۳ \to ۰=۳$$

معادله ریشهٔ دیگری به‌جز $۲x+۴=۰ \to x=-۲$ ندارد.

$$\alpha=-۲ \to \left[\frac{۳\alpha+۱}{\alpha}\right]=\left[\frac{۳(-۲)+۱}{-۲}\right]=\left[\frac{-۵}{-۲}\right]=۲$$

۱۱. گزینه ۳ درست است.

اگر سارای و عسل در ۱۰ روز کار را انجام دهند؛ داریم:

$$\frac{۱}{S}+\frac{۱}{A}=\frac{۱}{۱۰}$$

عسل در ۳۰ روز کل کار را انجام می‌دهد، پس هر روز $\frac{۱}{۳۰}$ آن را انجام می‌دهد.

$$\frac{۱}{S}+\frac{۱}{۳۰}=\frac{۱}{۱۰} \to \frac{۱}{S}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۳۰}=\frac{۲۰}{۳۰۰}=\frac{۱}{۱۵}$$

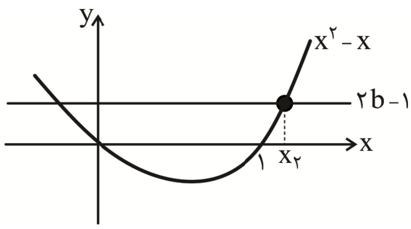
اگر ۶ روز عسل و ۵ روز سارای به تنهایی کار کنند داریم:

$$۶\left(\frac{۱}{A}\right)+۵\left(\frac{۱}{S}\right)=۶\left(\frac{۱}{۳۰}\right)+۵\left(\frac{۱}{۱۵}\right)=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۳}=\frac{۸}{۱۵}$$

۱۲. گزینه ۱ درست است.

ابتدا در طرف چپ مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۱}{x-\sqrt{x-۱}}-\frac{۱}{x+\sqrt{x-۱}}=\frac{۲\sqrt{x-۱}}{x^۲-(\sqrt{x-۱})^۲}=\frac{\sqrt{x-۱}}{b}$$



پس با شرط $x \neq ۱$ داریم:

$$x^۲ - (x-۱) = ۲b \Rightarrow x^۲ - x = ۲b - ۱$$

یک جواب معادلۀ اولیه، $x = ۱$ است. برای داشتن جواب دوم باید معادلۀ $x^۲ - x = ۲b - ۱$ جواب دیگری بیشتر از ۱ داشته باشد.

پس با توجه به شکل روبه‌رو باید $۰ < ۲b - ۱$ باشد، پس $b > \frac{۱}{۲}$ که فقط $۲ - \sqrt{۲}$ در بین گزینه‌ها این‌طور است.

۱۳. گزینه ۳ درست است.

معادله را به‌صورت $x^۲ + x + ۱ + \sqrt[۳]{x^۲ + x + ۱} - ۱۰ = ۰$ بازنویسی می‌کنیم و $\sqrt[۳]{x^۲ + x + ۱}$ را برابر t در نظر می‌گیریم. داریم:

$$t^۳ + t - ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\text{حدس } t=۲} ۸ + ۲ - ۱۰ = ۰ \Rightarrow t^۳ + t - ۱۰ = (t-۲)\underbrace{(t^۲ + ۲t + ۵)}_{\Delta < ۰}$$

بنابراین تنها ریشه عبارت $t = ۲$ است، داریم:

$$t = \sqrt[۳]{x^۲ + x + ۱} = ۲ \Rightarrow x^۲ + x + ۱ = ۸ \Rightarrow x^۲ + x - ۷ = ۰$$

با توجه به اینکه $\frac{c}{a}$ منفی است، بنابراین دلتا مثبت خواهد بود و معادله دو ریشه متمایز و ضرب ریشه $\frac{c}{a} = -۷$ است.

۱۴. گزینه ۱ درست است.

x	۰/۸	۰/۹	۱	۱/۱	۱/۴
y	۵	۶	۸	۹	۱۲

می‌دانیم:

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

پس در فاصله $[۰/۹, ۱]$ داریم:

$$f'(۱) \simeq \frac{۸ - ۶}{۱ - ۰/۹} = ۲۰$$

و در فاصله $[۱, ۱/۱]$ داریم:

$$f'(۱) = \frac{۹ - ۸}{۱/۱ - ۱} = ۱۰$$

و بهترین تخمین از $f'(۱)$، معدل این‌ها یعنی ۱۵ است.

۱۵. گزینه ۳ درست است.

سعی می‌کنیم در صورت کسر تعریف مشتق را بسازیم:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{۴f(x) - x^۲ f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۴f(x) - ۴f(۲) + ۴f(۲) - x^۲ f(۲)}{x - ۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{۲^۲ (f(x) - f(۲))}{x - ۲} - \lim_{x \to ۲} \frac{f(۲)(x^۲ - ۲^۲)}{x - ۲} \xrightarrow{g(x) = x^۲} ۴f'(۲) - f(۲) g'(۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{۴}{(۲x+۲)^۲} \Rightarrow f'(۲) = \dfrac{۱}{۹} \\ g'(x) = ۲x \Rightarrow g'(۲) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۴}{۹} - \frac{۴}{۶} = -\frac{۲}{۹}$$

۱۶. گزینه ۲ درست است.

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f^۲(x) + g^۲(x) = ۱ \xrightarrow{\text{مشتق}} ۲f(x)f'(x) + ۲g(x)g'(x) = ۰ \Rightarrow ۲f(x)g(x) - ۲g(x)f(x) = ۰$$

مقدار مشتق به‌ازای xهای قابل قبول برابر صفر است.

۱۷. **گزینه ۳ درست است.**

در تابع f، نقطه گوشه وجود دارد و در نقطه ریشهٔ قدرمطلق، مشتق‌پذیر نیست؛ بنابراین برای مشتق‌پذیر بودن $f\times g$، باید حد تابع $g(x)$ در این نقاط برابر صفر باشد، پس نتیجه می‌گیریم $x=1$ و $x=-4$ ریشه‌های تابع g هستند و داریم:

$$g(1)=a+b+c=0$$

۱۸. **گزینه ۱ درست است.**

با جایگذاری f داریم:

$$g(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{b}{x}+1 & , x\ge 2 \\ x^2(a-\dfrac{b}{x^2}) & , 0<x<2 \end{cases}$$

پس:

$$g'(x)=\begin{cases} a-\dfrac{b}{x^2} & , x>2 \\ 2ax & , 0<x<2 \end{cases}$$

از شرط پیوستگی در $x=2$ داریم:

$$1+2a+\frac{b}{2}=4(a-\frac{b}{4})\Rightarrow \frac{3b}{2}+1=2a\Rightarrow 3b+2=4a$$

و از شرط برابری مشتق‌های راست و چپ داریم:

$$a-\frac{b}{4}=4a\Rightarrow b=-12a$$

از حل این دو معادلهٔ داریم:

$$\begin{cases} 4a=3b+2 \\ b=-12a \end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{20} \ , \ b=\frac{-6}{10}$$

پس:

$$a-b=\frac{13}{100}$$

۱۹. **گزینه ۴ درست است.**

آهنگ تغییر سوی فاصله $[2,2+h]$ برابر است با:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

پس در تابع $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ داریم:

$$\frac{(2+h-\frac{1}{2+h})-(2-\frac{1}{2})}{h}=\frac{h+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+h}}{h}=\frac{h+\frac{h}{2(2+h)}}{h}\xrightarrow{\text{h را بزنیم}}1+\frac{1}{2(2+h)}=\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow 2(2+h)=5\Rightarrow 2+h=\frac{5}{2}=2/5\Rightarrow h=0/5$$

حالا آهنگ لحظه‌ای در هر نقطه برابر است با:

$$f'(x)=1-\frac{-1}{x^2}$$

پس در وسط بازه $[2,2/5]$ داریم:

$$f'(2/25)=1+\frac{1}{(2/25)^2}=1+\frac{1}{\left(\frac{9}{4}\right)^2}=1+\frac{16}{81}=\frac{97}{81}$$

۲۰. **گزینه ۲ درست است.**

از تابع مشتق می‌گیریم و برد تابع مشتق را می‌یابیم.

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}\longrightarrow f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}+۱}}\to f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$$

برای یافتن برد تابع توجه کنید که $x^{۲}+۱>x^{۲}$ پس:

$$\sqrt{x^{۲}+۱}>\sqrt{x^{۲}}\to\sqrt{x^{۲}+۱}>|x|$$

طرفین را بر $\sqrt{x^{۲}+۱}$ تقسیم می‌کنیم.

$$۱>\frac{|x|}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\to\left|\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\right|<۱\to-۱<\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}<۱$$

درنتیجه برد تابع مشتق $(-۱,۱)$ و مقدار $b-a=۲$ است.

۱- اگر $f(x)=3x-|2x-2|$ و تابع $g(f(x))$ بر $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، کدام ضابطه برای g مناسب است؟

۱) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$　　۲) $|\log x|$　　۳) $2x+|x-1|$　　۴) $|2^x-1|$

۲- تابع $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+2)}{x-1}+m$ مفروض است. اگر $(fof^{-1})(x)=(f^{-1}of)(x)$، آنگاه m ریشه کدام معادله است؟

۱) $x^2-2x-2=0$　　۲) $x^2+2x-4=0$　　۳) $x^2+x-2=0$　　۴) $x^2-x-2=0$

۳- اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ و $g(x)=\frac{|x|-|x+1|}{|x|+|x+1|}$ آنگاه در برد fog مجموع اعداد صحیح کدام است؟

۱) -1　　۲) -2　　۳) -3　　۴) صفر

۴- وارون تابع $f(x)=\frac{3^{x+1}-1}{3^x+2}$ را به‌صورت $f^{-1}(x)=\log_3^{g(x)}$ نوشته‌ایم. مقدار $g([g(0)])$ کدام است؟
([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱　　۲) صفر　　۳) $\frac{1}{4}$　　۴) $\frac{1}{3}$

۵- با توجه به نمودار زیر اگر $g(x)=2x-1$، $f(2)=5$ باشد، مقدار x_0 کدام است؟ (a، b و c اعدادی صحیح هستند)

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{2}{4}$

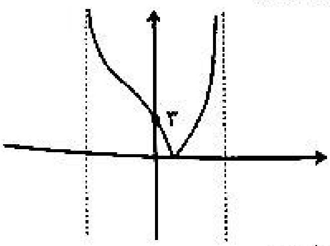
$$2x_0 \to \boxed{g} \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to 9$$

۳) $\frac{3}{4}$　　۴) ۱

۶- اگر در فاصله $[-1,1)$ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & ,-1\le x<0\\ 1-x+[x] & ,0\le x<1\end{cases}$ تعریف شود و دورهٔ تناوب آن $T=2$ باشد، سطح محصور به f و محور xها و خطوط $x=11$ و $x=14$ چقدر است؟

۱) $\pi+\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{\pi}{2}+1$　　۳) $\frac{\pi+1}{2}$　　۴) $\frac{\pi}{2}$

۷- اگر نمودار تابع $f(x)=|-2+k\tan(k\pi x+\frac{\pi}{3})|$ به‌صورت زیر باشد، مقدار $[k]$ کدام است؟



۱) ۱　　۲) ۲　　۳) -2　　۴) -1

۸- مجموع جواب‌های معادله $9\cos^3 x+\cos x=\frac{10}{3}$ در بازه $[0,3\pi)$، در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $(\frac{9\pi}{2},5\pi)$　　۲) $(4\pi,\frac{17\pi}{4})$　　۳) $(\frac{17\pi}{4},\frac{9\pi}{2})$　　۴) $(\frac{7\pi}{2},4\pi)$

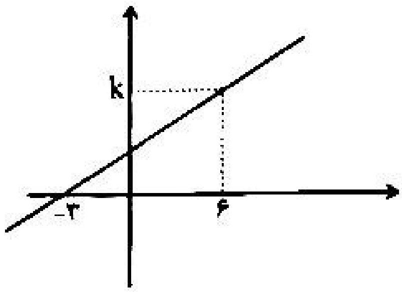
۹- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$ در فاصله $[\pi,3\pi]$ کدام است؟

۱) 15π　　۲) 16π　　۳) 17π　　۴) 18π

۱۰- اگر $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+ax+b}=+\infty$ باشد، مقدار $2a+b$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -1

۱۱- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{xf^{-1}(x)}{f^2(x)}=1$ باشد، آنگاه $f(k)$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۵

۱۲- حاصل حد $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+4x^2+2}-\sqrt{x^3-x^2+3}}{\sqrt{9x+\sqrt{2x}}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۳- حاصل $\lim_{x\to-\infty}[\frac{kx-2}{2x+1}]$ بهازای چند مقدار صحیح k برابر ۳- است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

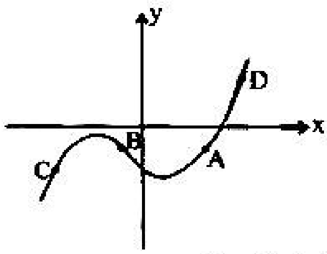
۱۴- اگر $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^3+ax^2+bx+c}=-\infty$ آنگاه $\frac{a+b}{c}$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۵- حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{[4\cos^2 x-1]}{\tan x-2\sin x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) صفر

۱۶- اگر f' مشتق تابع f باشد و f'' مشتق تابع f' را نشان دهد، در چند تا از نقاط A، B، C، D حاصل $xf'ff''$ منفی است؟

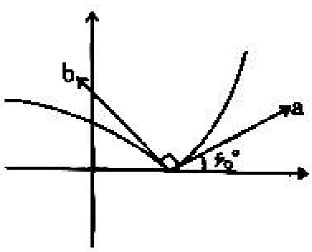


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۷- اگر $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{6x-x^2-8}}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(3-h)-f(3+2h)}{h}$ کدام است؟

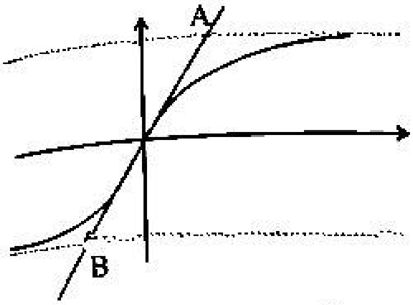
۱) $\frac{-3\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۸- دو نیمخط a و b در نقطه $x=1$ از دو طرف به تابع f مماس شدهاند، و بر همدیگر عمود هستند. حاصل عبارت $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+4h)-f(1-h)}{2h}$ کدام است؟



۱) $\frac{11\sqrt{3}}{6}$ ۲) $\frac{12\sqrt{3}}{6}$
۳) $\frac{-11\sqrt{3}}{6}$ ۴) $-3\sqrt{3}$

۱۹- نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}$ به شکل زیر است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



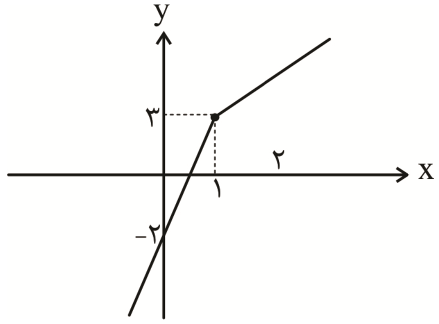
۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۰- تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}+ax+۲}{bx+[x]}$ مفروض است. اگر مقدار مشتق چپ تابع در $x=۱$ برابر $-\dfrac{۱}{۳}$ باشد، مقدار مشتق راست آن کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

ریاضی

۱. گزینه ۱ درست است.



نمودار $f(x) = ۳x - |۲x - ۲|$ را ببینید. تابع f اکیداً صعودی است.

حالا برای اینکه gof اکیداً نزولی شود باید g نزولی باشد. دقت کنید که $\log x$ بر $\mathbb{R}$ تعریف نمی‌شود. $|۲^x - ۱|$ در $x = ۰$ تغییر آهنگ می‌دهد.

$|x - ۱| + ۲x$ اکیداً صعودی است، اما $g(x) = \left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^x$ اکیداً نزولی است.

۲. گزینه ۱ درست است.

شرط برابر بودن $(fof^{-۱})(x) = (f^{-۱}of)(x)$، برابر بودن برد و دامنه تابع است. پس داریم:

$$D_f = (۱, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{(x-۱)(\sqrt{x+۲})}{x-۱} + m = \sqrt{x+۲} + m \xrightarrow{x>۱} R = (\sqrt{۳} + m, +\infty)$$

بنابراین $۱ = \sqrt{۳} + m$ و $m = ۱ - \sqrt{۳}$.

بررسی گزینه‌ها:

$$۱)\ x^۲ - ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۳}$$

$$۲)\ x^۲ + ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \pm \sqrt{۵}$$

$$۳)\ x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱, -۲$$

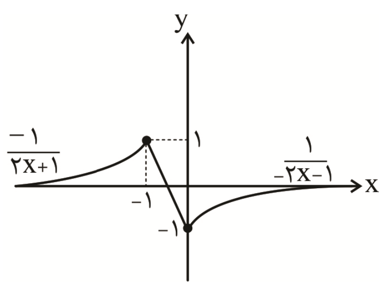
$$۴)\ x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱, ۲$$

۳. گزینه ۳ درست است.

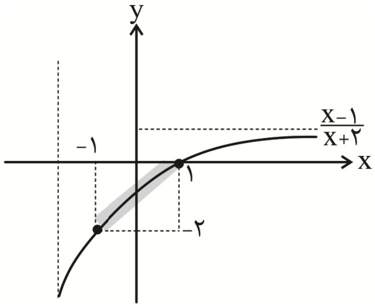
ابتدا نمودار $g(x) = \frac{|x| - |x+۱|}{|x| + |x+۱|}$ را با بازه‌بندی رسم می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x + (x+۱)}{-x - (x+۱)}, & x < -۱ \\ \frac{-x - (x+۱)}{-x + (x+۱)}, & -۱ \le x < ۰ \\ \frac{x - (x+۱)}{x + (x+۱)}, & x \ge ۰ \end{cases} = \begin{cases} \frac{۱}{-۲x - ۱}, & x < -۱ \text{ یا } x \ge ۰ \\ -۲x - ۱, & -۱ \le x < ۰ \end{cases}$$

نمودار g را ببینید



پس برد g در فاصله $[-۱,۱]$ است و باید فقط قسمتی از نمودار f که در فاصله -۱ تا ۱ است را ببینیم:



$$-۱ \le g(x) \le ۱$$

$$\xrightarrow{\text{f صعودی است}} f(-۱) \le f\big(g(x)\big) \le f(۱) \Rightarrow -۲ \le fog \le ۰$$

یعنی برد fog فاصله $[-۲,۰]$ است که ۳ عدد صحیح دارد و جمع آن‌ها می‌شود.

$$(-۲)+(-۱)+۰=-۳$$

۴. **گزینه ۴ درست است.**

$f(x)$ ترکیب دو تابع ۳^x و $\frac{۳x-۱}{x+۲}$ است.

$$x \to \boxed{۳^x} \to \boxed{\frac{۳x-۱}{x+۲}} \to y$$

پس برای $f^{-۱}(x)$ داریم:

$$x \leftarrow \boxed{\log_۳^x} \leftarrow \boxed{\frac{-۲x-۱}{x-۳}} \leftarrow y$$

یعنی:

$$f^{-۱}(x)=\log_۳^{\frac{-۲x-۱}{x-۳}}$$

و داریم:

$$g(x)=\frac{-۲x-۱}{x-۳}$$

$$g(۰)=\frac{۱}{۳} \Rightarrow [g(۰)]=۰ \Rightarrow g([g(۰)])=g(۰)=\frac{۱}{۳}$$

۵. **گزینه ۳ درست است.**

برای پیدا کردن $f(۲)$، ورودی تابع f (یعنی خروجی تابع $g(۲x)$) باید برابر ۲ باشد، پس داریم:

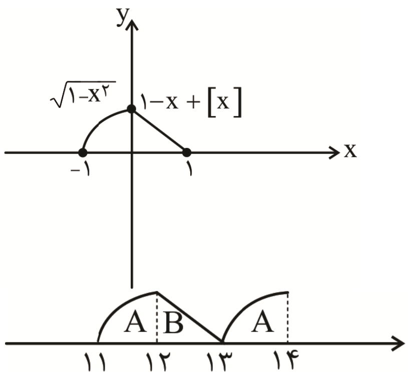
$$g(۲x)=۴x-۱=۲ \Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$

همچنین ورودی دومین تابع g، $f(۲)$ و خروجی آن ۹ است، پس داریم:

$$g\big(f(۲)\big)=۲f(۲)-۱=۲(۵)-۱=۹$$

۶. **گزینه ۳ درست است.**

نمودار f را ببینید:



در فاصله ۱۱ تا ۱۴ با توجه به دورهٔ تناوب ۲ داریم:

مساحت در بخش A روی هم می‌شود مساحت نیم‌دایره به شعاع ۱ یعنی $\frac{\pi}{۲}$ و مساحت بخش B برابر است با $\frac{۱\times۱}{۲}$، پس جواب می‌شود: $\frac{\pi+۱}{۲}$

۷. گزینه ۴ درست است.

با توجه به نمودار داده‌شده، متوجه می‌شویم تابع $y=-2+k\tan(k\pi x+\frac{\pi}{3})$ در $x=0$، برابر -3 هست، پس داریم:

$$-3=-2+k\tan(0+\frac{\pi}{3})\Rightarrow -1=k\times\sqrt{3}\Rightarrow k=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow [k]=-1$$

۸. گزینه ۳ درست است.

با توجه به معادله داده‌شده و تغییر متغیر داریم:

$$9\cos^3 x+\cos x=\frac{10}{3}\Rightarrow 27\cos^3 x+3\cos=10\xrightarrow{3\cos x=t}t^3+t=10$$

$$\xrightarrow{\text{حدس ریشه}}t=2\Rightarrow (t-2)\overbrace{(t^2+2t+5)}^{\Delta<0}=0\Rightarrow t=3\cos x=2\Rightarrow \cos x=\frac{2}{3}$$

می‌دانیم در $x=\frac{\pi}{4}$، مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ با یکدیگر برابر و تقریباً برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1/4}{2}=0/7$ است، با توجه به اینکه $\frac{2}{3}\approx 0/66$ از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کوچک‌تر است، نتیجه می‌گیریم $\frac{\pi}{2}>x>\frac{\pi}{4}$.

همچنین جواب‌های $\cos x=k$ در بازه $[0,2\pi]$ برابر a و $2\pi-a$ است که مجموعشان برابر 2π است. از آنجا که در بازهٔ $[2\pi,3\pi]$ معادله $\cos x=\frac{2}{3}$ تنها یک ریشه بین $2\pi+\frac{\pi}{4}$ و $2\pi+\frac{\pi}{2}$ دارد، مجموع ریشه‌ها باید از $4\pi+\frac{\pi}{4}$ بزرگ‌تر و از $4\pi+\frac{\pi}{2}$ کوچک‌تر باشد: $\frac{9\pi}{2}<$ مجموع $<\frac{17\pi}{4}$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ درست است.

۹. گزینه ۲ درست است.

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{3}{8}=\frac{1}{2}\sin^2 2x\Rightarrow\sin^2 2x=\frac{3}{4}=\sin^2\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}$$

در فاصله $[\pi,3\pi]$ داریم:

	$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$				$\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$			
k	2	3	4	5	3	4	5	6
x	$\pi+\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$2\pi+\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$	$2\pi-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$	$3\pi-\frac{\pi}{6}$

پس جمع کل ریشه‌ها می‌شود: 16π

۱۰. گزینه ۱ درست است.

مخرج تابع در $x=1$ ریشهٔ مکرر از مرتبهٔ زوج دارد.

$$x^3+ax+b=(x-1)^2(x-k)\Rightarrow x^3+ax+b=(x^2-2x+1)(x-k)$$

$$x^3+ax+b=x^3-kx^2-2x^2+2kx+x-k$$

$$x^3+ax+b=x^3-(k+2)x^2+(2k+1)x-k$$

با مقایسهٔ دو چندجمله‌ای به این نتیجه می‌رسیم که مقدار $k+2$ برابر صفر است:

$$k+2=0\Rightarrow k=-2$$

با جایگذاری مقدار به‌دست آمده داریم:

$$x^{۳}+ax+b=x^{۳}-۳x+۲\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\b=۲\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=-۴$$

۱۱. گزینه ۳ درست است.

تابع خطی f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases}f(-۳)=۰\\f(۶)=k\end{cases}\Rightarrow f(x)=a(x+۳)\Rightarrow a(۶+۳)=k\Rightarrow a=\frac{k}{۹}\Rightarrow f(x)=\frac{k}{۹}(x+۳)$$

با توجه به تعریف تابع وارون، $f^{-۱}(x)=\frac{۹}{k}x-۳$ خواهد بود، پس برای محاسبه حد داده‌شده داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf^{-۱}(x)}{f^{۲}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{۹}{k}x-۳\right)}{\left(\frac{k}{۹}(x+۳)\right)^{۲}}\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۹}{k}x^{۲}}{\frac{k^{۲}}{۸۱}x^{۲}}=\frac{۹^{۳}}{k^{۳}}=۱\Rightarrow k=۹$$

$$\Rightarrow f(x)=x+۳\Rightarrow f(k)=f(۹)=۹+۳=۱۲$$

۱۲. گزینه ۴ درست است.

در ابتدا صورت و مخرج را در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^{۳}+۴x^{۲}+۲}-\sqrt{x^{۳}-x^{۲}+۳}}{\sqrt{۹x+\sqrt{۲x}}}\times\frac{\sqrt{x^{۳}+۴x^{۲}+۲}+\sqrt{x^{۳}-x^{۲}+۳}}{\sqrt{x^{۳}+۴x^{۲}+۲}+\sqrt{x^{۳}-x^{۲}+۳}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^{۳}+۴x^{۲}+۲)-(x^{۳}-x^{۲}+۳)}{\sqrt{(۹x+\sqrt{۲x})(x^{۳}+۴x^{۲}+۲)}+\sqrt{(۹x+\sqrt{۲x})(x^{۳}-x^{۲}+۳)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x^{۲}-۱}{\sqrt{۹x^{۴}+۳۶x^{۳}+\dots}+\sqrt{۹x^{۴}-۹x^{۳}}}\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x^{۲}}{۳x^{۲}+۳x^{۲}}=\frac{۵}{۶}$$

۱۳. گزینه ۴ درست است.

حد داخل براکت در $-\infty$ برابر $\frac{k}{۲}$ است، پس باید $-۳<\frac{k}{۲}<-۲$ باشد و برای -۳ و $\frac{k}{۲}=-۲$ هم باید صعودی یا نزولی بودن را بررسی کرد.

الف) اگر $-۶<k<-۴$ باشد، حاصل حد می‌شود $\left[\frac{k}{۲}\right]=-۳$

ب) برای $k=-۴$ درون براکت $\frac{-۴x-۲}{۲x+۱}$ است و براکتش هم -۲ است.

پ) برای $k=-۶$ تابع $\frac{-۶x-۲}{۲x+۱}$ برای $x<-\frac{۱}{۲}$ نزولی است. پس نمودارش در $-\infty$ به‌صورت ‐‐‐‐‐‐‐‐‐۳‐ است و حد براکتش می‌شود -۴.

پس فقط $-۶<k<-۴$ را می‌خواهیم که یک عدد صحیح -۵ دارد.

۱۴. گزینه ۲ درست است.

مخرج کسر باید به‌صورت $(x-۲)^{۳}$ باشد.

$$x^{۳}+ax^{۲}+bx+c=(x-۲)^{۳}=x^{۳}-۶x^{۲}+۱۲x-۸$$

در این صورت حاصل حد به $-\infty$ میل می‌کند.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-x}{(x-۲)^۳}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۱}{(x-۲)^۲}=-\infty$$

بنابراین $a=-۶$ و $b=۱۲$ و $c=-۸$ و حاصل:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{-۶+۱۲}{-۸}=-\frac{۳}{۴}$$

۱۵. گزینه ۱ درست است.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}^+}\frac{[۴\cos^۲ x-۱]}{\tan x-۲\sin x}$$

در صورت کسر $۴\cos^۲ x-۱$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۳}$ صفر می‌شود $۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲-۱=۰$ و چون $\cos^۲ x$ در اطراف $\frac{\pi}{۳}$ نزولی است

در $\frac{\pi}{۳}^+$ مقدار آن از صفر کمتر است، پس حاصل صورت کسر $[۰^-]=-۱$ خواهد بود.

در مخرج $\tan\frac{\pi}{۳}-۲\sin\frac{\pi}{۳}$ صفر است. برای بررسی ۰^- یا ۰^+، آن را کمی تغییر می‌دهیم:

$$\tan x-۲\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-۲\sin x=\frac{\sin x-۲\sin x\cos x}{\cos x}=\frac{(۱-۲\cos x)\sin x}{\cos x}$$

در $\frac{\pi}{۳}^+$ مقدار $۱-۲\cos x$ مثبت است (چون $\cos x<\frac{۱}{۲}$)، پس جواب مخرج ۰^+ است و حد می‌شود $\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

۱۶. گزینه ۲ درست است.

		A	B	C	D
طول نقطه	x	+	−	−	+
عرض نقطه	f	−	−	−	+
شیب مماس	f'	+	−	+	+
جهت تقعر	f''	+	−	−	+
	ضرب	⊖	⊕	⊖	⊕

می‌دانیم x، در سمت راست محور عرض ⊕ و در سمت چپ آن ⊖ است. حاصل f در بالای محور x مثبت و زیر محور x منفی است. مقدار f' هر جا تابع صعودی باشد مثبت و اگر تابع نزولی باشد منفی است. f''، هرگاه تقعر f رو به بالا باشد (از چپ به راست شیب مماس‌ها زیاد شود) مثبت است و برعکس.

۱۷. گزینه ۴ درست است.

با استفاده از مزدوج، زیر رادیکال را عوض می‌کنیم:

$$۱-\sqrt{۶x-x^۲-۸}\times\frac{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}=\frac{۱^۲-\sqrt{(۶x-x^۲-۸)^۲}}{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}$$

$$=\frac{۱-(۶x-x^۲-۸)}{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}=\frac{x^۲-۶x+۹}{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}=\frac{(x-۳)^۲}{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}$$

پس: $f(x)=\frac{|x-۳|}{\sqrt{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}}$ و برای محاسبه $f'_+(۳)$ و $f'_-(۳)$ قدرمطلق را با ⊕ و ⊖ برمی‌داریم و داریم:

$$x>۳: f(x)=\frac{x-۳}{\sqrt{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}}\rightarrow f'_{+}(۳)=\frac{۱}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$x<۳: f(x)=\frac{-(x-۳)}{\sqrt{۱+\sqrt{۶x-x^۲-۸}}}\rightarrow f'_{-}(۳)=\frac{-۱}{\sqrt{۱+۱}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

حالا با قاعده هوپیتال یا اضافه و کم کردن $f(۳)$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۳-h)-f(۳+۲h)}{h}=-f'_{+}(۳)-۲f'_{-}(۳)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۸. گزینه ۱ درست است.

با اضافه و کم کردن عبارت $f(۱)$ در صورت و استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(۱+۴h)-f(۱-h)}{۲h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+۴h)-f(۱)\overbrace{-f(۱-h)+f(۱)}^{-(f(۱-h)-f(۱))}}{۲h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+۴h)-f(۱)}{۴h}\times ۲-\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱-h)-f(۱)}{h}\times\frac{۱}{۲}=۲f'_{+}(۱)+\frac{۱}{۲}f'_{-}(۱)$$

با توجه به نمودار $f'_{+}(۱)=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$ و $f'_{-}(۱)=-\tan ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، پس داریم:

$$۲f'_{+}(۱)+\frac{۱}{۲}f'_{-}(۱)=۲\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۶}=\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۶}$$

۱۹. گزینه ۲ درست است.

مقدار مشتق تابع در $x=۰$ برابر شیب خط AB است.

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}=۱$$

حاصل حدهای تابع در $\pm\infty$ را نیز می‌یابیم.

$$y=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{|x|}=۱$$

$$y=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{|x|}=-۱$$

با توجه به اینکه شیب خط AB برابر یک است و از مبدأ می‌گذرد؛ بنابراین مختصات نقطهٔ $A(۱,۱)$ و $B(-۱,-۱)$ و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$AB=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۲۰. گزینه ۲ درست است.

تابع $f(x)$ به خاطر وجود $[x]$ در مخرج کسر، در $x=۱$ پیوستگی چپ و مشتق چپ ندارد، مگر به‌ازای $x=۱$ مقدار صورت کسر صفر شود.

$$x=۱\Rightarrow (۱)^۲+a(۱)+۲=۰\Rightarrow a+۳=۰\Rightarrow a=-۳$$

حال مقدار مشتق چپ تابع در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\frac{x^۲-۳x+۲}{bx+[x]}-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x-۲}{bx+[x]}=\frac{-۱}{b+۰}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=۳$$

برای محاسبهٔ مشتق راست تابع در $x=۱$، از تعریف آن استفاده می‌کنیم.

$$f'_+(۱) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\frac{x^۲-۳x+۲}{۳x+[x]}-۰}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\frac{(x-۱)(x-۲)}{۳x+[x]}}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{x-۲}{۳x+[x]} = \frac{-۱}{۳+۱} = -\frac{۱}{۴}$$

راه دوم: برای محاسبه مشتق در $x = ۱$، فقط از عامل صفرشونده صورت مشتق می‌گیریم:

$$y' = \frac{۲x-۳}{۳x+[x]} \Rightarrow f'_+(۱) = \frac{-۱}{۴}$$

۱- حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt[4]{x^{3}\sqrt{x}}\times\sqrt[3]{x^{4}\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x^{2}\sqrt{x^{3}}}}$ کدام است؟

۱) $x^{\frac{21}{24}}$ ۲) $x^{\frac{29}{24}}$ ۳) $x^{\frac{13}{12}}$ ۴) $x^{\frac{15}{12}}$

۲- اگر a,b گویا و $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{a+b\sqrt{2}}$ عددی طبیعی باشد حاصل $\dfrac{a}{16-b}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{14}{9}$ ۴) $\frac{17}{2}$

۳- اگر $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}$ باشد حاصل $\left[x^{5}+\dfrac{1}{x^{5}}\right]$ کدام است؟ [ ] نماد جزء صحیح است.

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۴- اگر $65x^{2}+y^{2}+8xy=14x-1$ باشد، آنگاه $x-y$ در کدام بازه قرار دارد؟

۱) $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ ۲) $\left(\frac{3}{4},1\right)$ ۳) $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ ۴) $\left(\frac{1}{3},\frac{7}{11}\right)$

۵- اگر $\log_{c}a^{2}b=3$ و $\log_{c^{2}}a^{3}b^{3}=1$ باشد، آنگاه $a^{2}c^{2}\times\log_{b}a\times ac^{\log_{b}c}\times\log_{a}b^{a^{-2}}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶- از معادله $\log x+\log(x^{2}-8x+17)=\log 6$ بزرگ‌ترین مقدار x به‌صورت $\dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$ به‌دست آمده است. $\left[\dfrac{b}{a}\right]$ کدام است؟ $(a,b\in\mathbb{Q})$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۷- اگر $0<y<1<x$ و $\log_{y}^{x}-6\log_{x}^{y}=5$ آنگاه مقدار $\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۲

۸- معادلهٔ $\left|\log_{2}(3-x)\right|=\sqrt[3]{k}$ دو جواب مثبت دارد. حداکثر مقدار طبیعی برای k کدام است؟ $\log 2=0/3\ ,\ \log 3=0/48$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹- اگر $\log 72=a$ و $\log 30=b$ باشد، آنگاه $\log 45$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{5+8b+a}{3}$ ۲) $\dfrac{-5+b-8a}{3}$ ۳) $\dfrac{8-b+5a}{3}$ ۴) $\dfrac{-5+8b-a}{3}$

۱۰- نوعی باکتری موجود در روده انسان هر ۱۴ دقیقه به ۲ باکتری تقسیم می‌شود. اگر در ابتدا ۸ باکتری داشته باشیم و تقسیم شروع شود، بعد از گذشت تقریباً چند ساعت تعداد باکتری‌ها از یک میلیون بیشتر می‌شود؟ $(\log_{2}10^{6}\approx 19/9)$

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

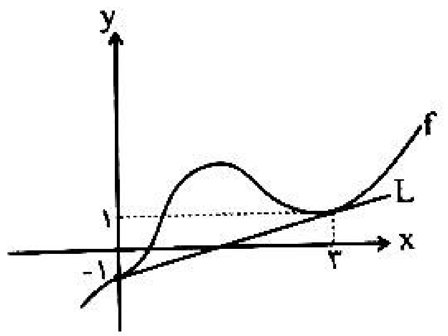
۱۱- اگر تابع f در بازه I دو بار مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^{2}}=2$، آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf'(x)-xf'(a)}{x-a}$ کدام است؟

۱) $1/5a$ ۲) $-0/5a$ ۳) $2a$ ۴) a

۱۲- تابع $f(x)=x\left|x^2-3x+2\right|$ مفروض است. مجموع اختلاف‌های مشتق چپ و راست در نقاط گوشه این تابع، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۳- مطابق شکل خط L در نقطه $x=3$ بر نمودار f مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3f(x)}{1-f^2(x)}$ کدام است؟

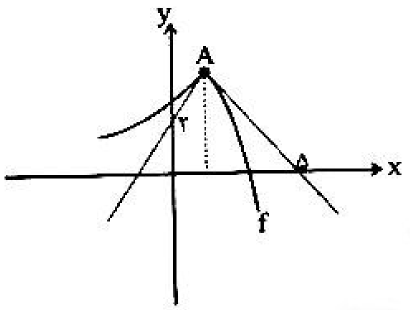


۱) $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{9}{4}$
۳) $\frac{9}{2}$
۴) $\frac{3}{2}$

۱۴- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=2|x-1|-|x-2|$ حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)+f(2-h)-k}{h}$ موجود و برابر b است. مقدار $k-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵- شکل زیر نمودار تابع f است که نیم‌مماس‌های راست و چپ در نقطه $A(1,4)$ رسم شده‌اند. جمع حدود چپ و راست عبارت $\dfrac{f(1-2h)-f(1+3h)}{h}$ وقتی $h\to 0$ کدام است؟



۱) -10
۲) -5
۳) 5
۴) 10

۱۶- اگر $f(x)=2x-|x-1|$ و $g(x)=ax+b+|x-2|$ و تابع gof در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $g'(\sqrt{5})$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۷- اگر $f(x)=\left[\frac{-2}{x}\right](x^2-4)$ و $g(x)=\left|\frac{x}{2}\right|\sqrt[3]{10+x}$ آنگاه مشتق چپ fog در $x=-2$ چقدر از ۴ کمتر است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۸- نمودار تابع مشتق $f(x)=|x^2-2x|$ خط $y=k$ را قطع نمی‌کند. k چند مقدار حقیقی می‌تواند اختیار کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹- چند نقطه روی تابع $f(x)=-|x-1|+1$ وجود دارد که خطوط مماس از آن نقطه یا نقطه‌ها بر سهمی $y=x^2$ بر هم عمود باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰- اگر $f^{-1}(\sqrt[3]{x}+1)=x^3+x$ آنگاه مشتق تابع $f(x)$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{12}$

ریاضی

۱. **گزینه ۲ درست است.**

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}\times\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}}=\frac{\left(x^{3+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(x^{4+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{2+\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(x^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x^{\frac{7}{8}+\frac{3}{2}}}{x^{\frac{7}{6}}}=x^{\frac{7}{8}+\frac{3}{2}-\frac{7}{6}}=x^{\frac{29}{24}}$$

۲. **گزینه ۱ درست است.**

در عبارت $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\quad+b\sqrt{2}}$، حاصل بخش اول $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$ است. پس باید جواب قسمت دوم حتماً $k-\sqrt{2}$ شود تا $\sqrt{2}$ها با هم بروند و جواب بشود $k-1$.

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{2}}=k-\sqrt{2}\xrightarrow{\text{به توان ۳}}a+b\sqrt{2}=(k-\sqrt{2})^3=k^3-3\sqrt{2}k^2+6k-2\sqrt{2}$$
$$=(k^3+6k)-(3k^2+2)\sqrt{2}$$

پس داریم:

$$b=-3k^2-2\ ,\ a=k^3+6k$$

بنابراین $16-b=3k^2+18$ و نسبت $\frac{a}{16-b}$ می‌شود $\frac{k^3+6k}{3k^2+18}$ یعنی $\frac{k}{3}$ که یک سوم عدد طبیعی است و در گزینه‌ها فقط $\frac{7}{3}$ امکان دارد.

۳. **گزینه ۲ درست است.**

رابطه صورت سؤال را یک‌بار به توان ۲ و یک‌بار به توان ۳ می‌رسانیم.

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x^2+\frac{1}{x^2}+2=5\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=3$$

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}\xrightarrow{\text{به توان ۳}}x^3+\frac{1}{x^3}+3x\times\frac{1}{x}\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{\sqrt{5}}=\sqrt{5}^3$$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=2\sqrt{5}$$

حالا در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}x^2+\frac{1}{x^2}=3\\ x^3+\frac{1}{x^3}=2\sqrt{5}\end{cases}\xrightarrow{\times}x^5+\frac{1}{x^5}+\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}\Rightarrow x^5+\frac{1}{x^5}=5\sqrt{5}=\sqrt{125}$$

که جزء صحیح آن می‌شود ۱۱ زیرا: $11<\sqrt{125}<12$

۴. **گزینه ۱ درست است.**

معادله داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$49x^2-14x+1+16x^2+y^2+8xy=(7x-1)^2+(4x+y)^2=0$$

باتوجه به اینکه هر دو عبارت نامنفی هستند و جمع آن‌ها برابر صفر شده است، نتیجه می‌گیریم هر دو عبارت برابر با صفر هستند.

$$7x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{7}\ ,\ 4x+y=0\Rightarrow \frac{4}{7}+y=0\Rightarrow y=-\frac{4}{7}$$

$$x-y=\frac{1}{7}-\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{5}{7}\approx 0/71$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

۵. **گزینه ۲ درست است.**

باتوجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\begin{cases}\log_c a^2b=3\Rightarrow c^3=a^2b\\ \log_{c^2} a^3b^3=1\Rightarrow c^2=a^3b^3\end{cases}\Rightarrow c=\frac{1}{ab^2}\Rightarrow ac=\frac{1}{b^2}=b^{-2}$$

حال خواسته سؤال را ساده می‌کنیم:

$$a^2c^2\times\log_b a\times\underbrace{ac^{\log_b c}}_{c^{\log_b ac}}\times\underbrace{\log_a b^{a^{-2}}}_{a^{-2}\times\log_a b}=\log_b a\times\log_a b\times a^{-2}\times a^2c^2\times c^{\log_b \frac{1}{b^2}}$$

$$=a^{-2}\times a^2c^2\times c^{-2}=1$$

۶. **گزینه ۴ درست است.**

از معادله $\log x+\log(x^2-8x+17)=\log 6$ داریم:

$$x(x^2-8x+17)=6\Rightarrow x^3-8x^2+17x-6=0$$

با کمی جستجو $x=3$ می‌خورد:

$$27-72+51-6=0$$

پس در تجزیه $x-3$ داریم:

$$(x-3)\underbrace{(x^2-5x+2)}_{\text{با تقسیم بر } x-3 \text{ به‌دست آمد}}=0$$

پس ریشه‌ها $x=3,\ \frac{5\pm\sqrt{25-8}}{2}$ هستند و ریشه بزرگ‌تر معادله می‌شود $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ و بنابراین: $\left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{17}{5}\right]=3$

۷. **گزینه ۱ درست است.**

در معادلهٔ

$$\log_y^x-6\log_x^y=5$$

اگر به جای $\log_y^x$، t قرار دهیم داریم:

$$=t-\frac{6}{t}=5\Rightarrow t^2-5t-6=0$$

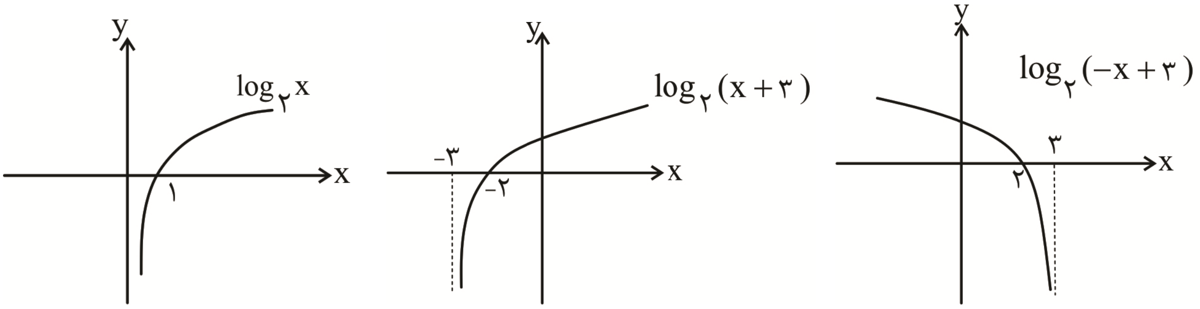
حالا با شرط $y<1<x$ باید $\log_y^x$ منفی باشد، پس $t=\log_y^x=-1$ را قبول می‌کنیم و داریم: $xy=1$

حالا:

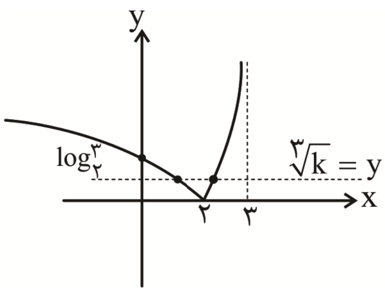
$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}=\frac{1+y+1+x}{(1+x)(1+y)}=\frac{2+x+y}{1+x+y+\underbrace{xy}_{1}}=1$$

۸. **گزینه ۴ درست است.**

نمودار $y=\left|\log_{۲}(۳-x)\right|$ را رسم می‌کنیم.



پس:



$y=|\log_{۲}(۳-x)|$

حالا تلاقی آن با $y=\sqrt[۳]{k}$ دو جواب مثبت دارد، پس:

$$۰<\sqrt[۳]{k}<\log_{۲}^{۳}$$

مقدار $\log_{۲}^{۳}$ برابر است با:

$$\log_{۲}^{۳}=\frac{\log ۳}{\log ۲}=\frac{۰/۴۸}{۰/۳}=۱/۶$$

بنابراین $\sqrt[۳]{k}<۱/۶$ پس $k<۱/۶^{۳}$ یعنی $k<۴/۰۹۶$ و بیشترین مقدار طبیعی k می‌شود ۴.

۹. **گزینه ۴ درست است.**

خواسته سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\log ۴۵=\log ۹+\log ۵=\log ۹+۱-\log ۲$$

حال با استفاده از معادله‌های داده‌شده داریم:

$$\begin{cases}\log ۷۲=\log ۸+\log ۹=۲\log ۳+۳\log ۲=a\Rightarrow \log ۲=\dfrac{a-۲\log ۳}{۳}\\ \log ۳۰=\log ۱۰+\log ۳=۱+\log ۳=b\Rightarrow \log ۳=b-۱\end{cases}$$

پس داریم:

$$\log ۹+۱-\log ۲=۲\underbrace{\log ۳}_{b-۱}+۱-\underbrace{\log ۲}_{\frac{a-۲\log ۳}{۳}}=۲b-۲+۱-\frac{a-۲\overbrace{\log ۳}^{b-۱}}{۳}$$

$$=\frac{۶b-۳-a+۲b-۲}{۳}=\frac{-۵+۸b-a}{۳}$$

۱۰. **گزینه ۳ درست است.**

$$P(t)=A\times ۲^{\frac{t}{T}}=۸\times ۲^{\frac{t}{۱۴}}=۱۰^{۶}$$

$$\Rightarrow ۱۰^{۶}=۲^{۳+\frac{t}{۱۴}}\xrightarrow{\log_{۲}}۳+\frac{t}{۱۴}=۱۹/۹\Rightarrow t=۱۶/۹\times ۱۴=۲۳۷/۶$$

پس تقریباً ۲۳۸ دقیقه بعد (حدود ۴ ساعت) تعداد باکتری‌ها به یک میلیون می‌رسد.

۱۱. **گزینه ۳ درست است.**

با استفاده از معادله دادهشده داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-۲f(a)+f(a-h)}{h^۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(-h+a)}{۲h}$$

با اضافه و کم کردن $f'(a)$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)-f'(-h+a)+f'(a)}{۲h}=\frac{۱}{۲}\left(\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)}{h}-\frac{f'(-h+a)-f'(a)}{h}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)}{h}+\frac{f'(-h+a)-f'(a)}{-h}\right)=\frac{۱}{۲}(f''(a)+f''(a))=f''(a)=۲$$

حال خواسته صورت سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{x(f'(x)-f'(a))}{x-a}=a\times f''(a)=۲a$$

۱۲. **گزینه ۳ درست است.**

تابع به‌صورت $f(x)=x\left|(x-۱)(x-۲)\right|$ است، بنابراین نقاط $x=۱$ و $x=۲$ نقاط گوشه این تابع هستند. مشتق راست و چپ در این نقاط قرینه هستند. برای این نقاط داریم:

$$x=۲\to f'_+(x)=(x^۳-۳x^۲+۲x)'=۳x^۲-۶x+۲$$

$$\xrightarrow{x=۲}f'_+(۲)=۱۲-۱۲+۲=۲\Rightarrow f'_-(۲)=-۲\Rightarrow \text{اختلاف}=۴$$

$$x=۱\to f'_+(x)=(-x^۳+۳x^۲-۲x)'=-۳x^۲+۶x-۲$$

$$\xrightarrow{x=۱}f'_+(۱)=-۳+۶-۲=-۱\Rightarrow f'_-(۱)=۱\Rightarrow \text{اختلاف}=۲$$

بنابراین مجموع اختلاف‌ها برابر ۶ است.

۱۳. **گزینه ۱ درست است.**

شیب خط L، برابر مشتق تابع f در نقطه $x=۳$ است، پس داریم:

$$m_L\frac{۱-(-۱)}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow f'(۳)=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x-۳f(x)}{۱-f^۲(x)}\xrightarrow{HOP}=\lim_{x\to ۳}\frac{۱-۳f'(x)}{۰-۲f(x)f'(x)}=\frac{۱-۳(\frac{۲}{۳})}{-۲(۱)(\frac{۲}{۳})}=\frac{۳}{۴}$$

۱۴. **گزینه ۳ درست است.**

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲|x-۱|-|x-۲|$ حاصل $\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)+f(۲-h)-k}{h}$ می‌شود $\frac{f(۱)+f(۲)-k}{۰}$

و چون حد موجود است باید صورت هم صفر شود، پس: $k=f(۱)+f(۲)$

$$\left.\begin{array}{l}f(۱)=۲(۰)-۱=-۱\\ f(۲)=۲(۱)-۰=۲\end{array}\right\}\Rightarrow k=۱$$

حال برای محاسبه حاصل حد مبهم، از قاعدهٔ هوپیتال یا تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)+f(۲-h)-f(۲)}{h}\xrightarrow{۱+h<۱,۲-h>۲}f'_-(۱)-f'_+(۲)$$

در تابع $f(x)=۲|x-۱|-|x-۲|$ در سمت چپ $x=۱$ داریم:

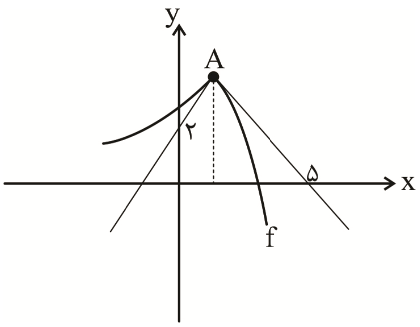
$$f(x)=2(-x+1)+(x-2)=-x \Rightarrow f'_-(1)=-1$$

و در سمت راست $x=2$ داریم:

$$f(x)=2(x-1)-(x-2)=x \Rightarrow f'_+(2)=1$$

بنابراین پاسخ حد $-2=-1-1$ است و جواب $k-b=1-(-2)=3$ است.

۱۵. گزینه ۲ درست است.



نیم مماس راست از $A(1,4)$ و $(5,0)$ می‌گذرد. پس شیب آن $\frac{4-0}{1-5}$ یعنی -1 است، پس: $f'_+(1)=-1$

شیب نیم‌مماس چپ با دو نقطه $A(1,4)$ و $(0,2)$ برابر $\frac{2-4}{0-1}=2$ به‌دست می‌آید

پس $f'_-(1)=2$ حالا $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(1-2h)-f(1+3h)}{h}$ با قاعده هوپیتال برابر $-2f'_-(1)-3f'_+(1)$ است که می‌شود $-2(2)-3(-1)$ یعنی -1

حد چپ هم برابر $-2f'_+(1)-3f'_-(1)$ است، یعنی $-2(-1)-3(2)$ که برابر -4 است. پس مجموعشان می‌شود -5

۱۶. گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=2x-|x-1|=\begin{cases}2x-(x-1)\ ,x\ge 1\\ 2x+(x-1)\end{cases}=\begin{cases}x+1\ ,x\ge 1\\ 3x-1\ ,x<1\end{cases}$$

$$g(x)=ax+b+|x-2|=\begin{cases}ax+b+x-2\ ,x\ge 2\\ ax+b-x+2\ ,x<2\end{cases}=\begin{cases}(a+1)x+b-2\ ,x\ge 2\\ (a-1)x+b+2\ ,x<2\end{cases}$$

$$gof(x)=g\big(f(x)\big)=\begin{cases}(a+1)f(x)+b-2\ ,f(x)\ge 2\\ (a-1)f(x)+b+2\ ,f(x)<2\end{cases}$$

چون f اکیداً صعودی و $f(1)=2$ است، داریم:

$$gof(x)=\begin{cases}(a+1)(x+1)+b-2, & x\ge 1\\ (a-1)(3x-1)+b+2, & x<1\end{cases}$$

gof ترکیب دو تابع پیوسته است، پس خودش پیوسته است و از مشتق‌پذیری داریم:

$$y'_+(1)=y'_-(1)\Rightarrow a+1=3(a-1)$$

پس $a=2$ و b هر مقدار دلخواهی می‌تواند باشد.

و داریم:

$$g'(\sqrt{5})=a+1=3$$

۱۷. گزینه ۴ درست است.

$$g(x)=\left|\frac{x}{2}\right|\sqrt[3]{10+x}\ \text{ و }\ f(x)=\left[\frac{-2}{x}\right](x^2-4)$$

$g(x)$ پیوسته است و $g(-2)=2$ و تابع f در $x=2$ پیوسته است. (عامل صفرشونده در جزء صحیح ضرب شده است.)

برای مشتق fog داریم:

$$(fog)'(-۲)=g'(-۲)f'(g(-۲))$$

$$x<۰ \Rightarrow g(x)=\frac{-x}{۲}\sqrt[۳]{۱۰+x} \Rightarrow g'(x)=\frac{-۱}{۲}\sqrt[۳]{۱۰+x}-\frac{x}{۲}\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۱۰+x)^۲}}$$

$$\Rightarrow g'(-۲)=-\frac{۱}{۲}(۲)-\frac{-۲}{۲}\frac{۱}{۳(۲)^۲}=-۱+\frac{۱}{۱۲}=\frac{-۱۱}{۱۲}$$

در سمت چپ $x=-۲$، چون g نزولی است مقدار $g(-۲)$ می‌شود ۲^+ پس $f'(g(-۲))$ می‌شود $f'(۲^+)$ که برابر است با:

$$x>۲ \Rightarrow \left[\frac{-۲}{x}\right]=-۱ \Rightarrow f(x)=۴-x^۲ \Rightarrow f'(x)=-۲x \Rightarrow f'_+(۲)=-۴$$

و جواب می‌شود $\frac{۱۱}{۳}=(-۴)\times\frac{-۱۱}{۱۲}$ که به اندازه $\frac{۱}{۳}$ از ۴ کمتر است.

۱۸. گزینه ۳ درست است.

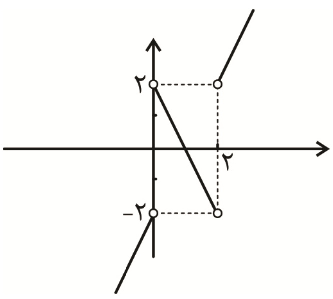
ضابطهٔ تابه $f(x)$ را به‌صورت قطعه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=|x^۲-۲x|=\begin{cases} x^۲-۲x & x<۰ \text{ یا } x>۲ \\ -x^۲+۲x & ۰\le x\le ۲\end{cases}$$

از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x<۰ \text{ یا } x>۲ \\ -۲x+۲ & ۰<x<۲\end{cases}$$

نمودار تابع $f'(x)$ را رسم می‌کنیم.



خط $y=k$ به‌ازاء $k=\pm۲$ نمودار تابع $f'(x)$ را قطع نمی‌کند.

۱۹. گزینه ۳ درست است.

فرض می‌کنیم از نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ خارج از منحنی $y=x^۲$ خط یا خطهایی مماس کرده‌ایم. معادلهٔ این خط $y-\beta=m(x-\alpha)$ یا $y=mx-m\alpha+\beta$ است. معادلهٔ تقاطع $y=x^۲$ و $y=mx-m\alpha+\beta$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$x^۲=mx-m\alpha+\beta \to x^۲-mx+(m\alpha-\beta)=۰ \to \Delta=۰$$
$$m^۲-۴(m\alpha-\beta)=۰ \to m^۲-۴m\alpha+۴\beta=۰$$

ازآنجایی‌که دو خط باید بر هم عمود باشند، پس:

$$mm'=-۱ \to \frac{c}{a}=-۱ \to \frac{۴\beta}{۱}=-۱ \to \beta=-\frac{۱}{۴}$$

یعنی روی نمودار $f(x)=-|x-۱|+۱$ نقاطی را می‌خواهیم که عرض آن‌ها $-\frac{۱}{۴}$ باشد.

$$-|x-۱|+۱=-\frac{۱}{۴} \to |x-۱|=\frac{۵}{۴} \to x=۱\pm\frac{۵}{۴} \to \begin{cases} x=\frac{۹}{۴} \\ x=-\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

پس دو نقطه روی نمودار $f(x)$ وجود دارد.

۲۰. گزینه ۴ درست است.

پاسخ: ضابطهٔ تابع f را محاسبه می‌کنیم.

$$f^{-1}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)=x^3+x \to \sqrt[3]{x}+1=f\left(x^3+x\right)$$

از دو طرف تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

$$\left(3x^2+1\right)f'(x^3+x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

به جای x مقدار یک را جایگذاری می‌کنیم.

$$\left(3+1\right)f'(2)=\frac{1}{3} \to f'(2)=\frac{1}{12}$$

مقدار مشتق تابع $f(x)$ در $x=2$ برابر $\frac{1}{12}$ است.

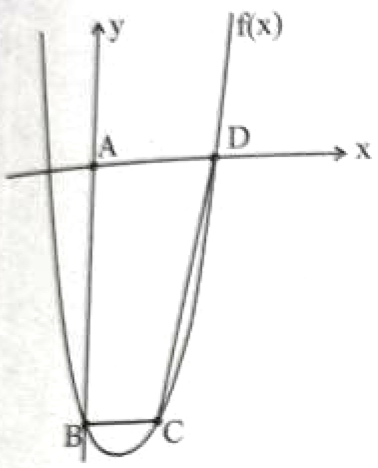
۱- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله $x^۲-۳x+m=۰$ و $x_۱$ و $x_۳$ ریشه‌های معادلـه $x^۲-nx-۲=۰$ باشـند، $x_۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۳n-۱}{m+۲}$ ۲) $\frac{۱-۳n}{m+۲}$ ۳) $\frac{۲n-۶}{m+۲}$ ۴) $\frac{۶-۲n}{m+۲}$

۲- اگر ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۱۱x+b=۰$ اعداد گویا باشند، چند مقدار طبیعی برای b وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳

۳- نمودار سهمی تابع $f(x)=۲x^۲-۶x-۸$ به‌صورت زیر است. نسبت مساحت به محیط در چهارضـلعی ABCD کدام است؟



۱) $\frac{۱۰۵-۷\sqrt{۶۵}}{۴۰}$ ۲) $\frac{۱۰۵+۷\sqrt{۶۵}}{۴۰}$ ۳) $\frac{۱۵-\sqrt{۶۵}}{۵}$ ۴) $\frac{۱۵+\sqrt{۶۵}}{۵}$

۴- مقدار $\sqrt{۹x-x^۲}$ برابر چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵- اگر جدول تعیین علامت تابع $y=(a-۲)x^۲+۲ax-۱$ به‌صورت زیر باشد، مجموع مقادیر a برابر با کدام است؟

x		$x_۱$	
y	−	۰	?

۱) −۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۶- اگر جواب نامعادله $\frac{(\sqrt{x}-۱)(x^۳-c)}{x^۲+ax+b}>۰$ به‌صورت $(۱,۵)-\{۲\}$ باشد، اختلاف دو مقدار ab کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۵۴ ۳) ۴۲ ۴) ۷۰

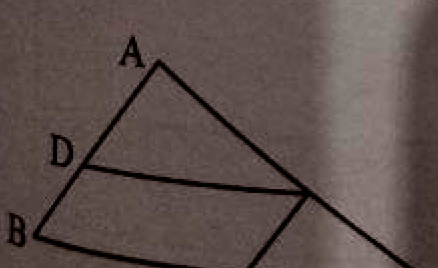
۷- اگر جواب نامعادله $a<\frac{x-b}{۲x+۳}<۱$ به‌صورت $(-۱,۲)$ باشد، ab کدام است؟

۱) $-\frac{۸}{۷}$ ۲) $\frac{۸}{۷}$ ۳) −۲۰ ۴) ۲۰

۸- نقطه A به فاصله ۱ از خط ℓ است. نقاطی که از A به فاصله $\sqrt{۱۰}$ و از ℓ به فاصله ۲ باشند، روی شکلی با کدام مساحت قرار دارند؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۹- در شکل روبه‌رو مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۰ درصد مثلث بزرگ است. نقطهٔ D ضلع AB را به کـدام نسـبت تقسیم می‌کند؟

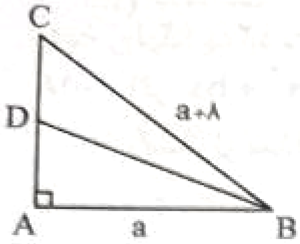


۱) $\frac{۲}{۳+\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{۱}{۳+\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۱۰- در مثلث ABC اگر $\hat{A} = 2\hat{B}$ طول نیم‌ساز رأس A کدام است؟ $(b = AC\ ,\ a = BC\ ,\ AB = C)$

۱) $\frac{a^2 - b^2}{a}$　　۲) $\frac{a^2 - b^2}{b}$　　۳) $\frac{a^2 - bc}{b}$　　۴) $\frac{a^2 - bc}{a}$

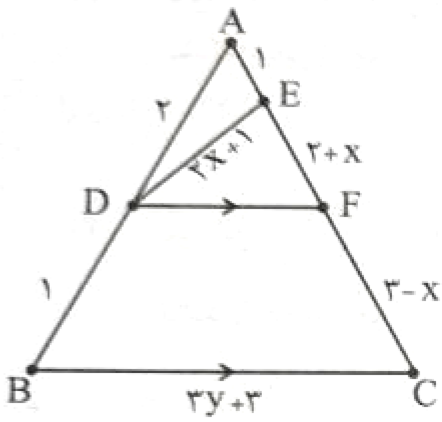
۱۱- در شکل زیر BD نیم‌ساز است و همچنین داریم $\frac{CD}{AD} = \frac{13}{5}$. طول پاره‌خط AD کدام است؟



۱) $\frac{10}{9}$　　۲) $\frac{5}{3}$

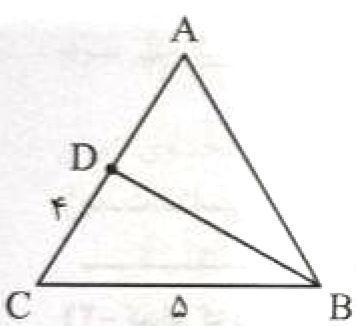
۳) $\frac{10}{3}$　　۴) ۳

۱۲- در شکل زیر، DF با BC موازی است، مقدار $x + y$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۳- در شکل زیر داریم $2C\hat{A}B = 2D\hat{B}C = D\hat{B}A$، طول AD کدام است؟

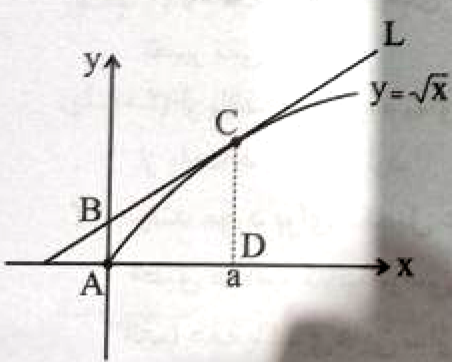


۱) ۱/۷۵
۲) ۲/۲۵
۳) ۳
۴) ۴

۱۴- اگر $x > 0$, $f(x) = x - \frac{2}{x}$، آهنگ متوسط تغییر $f^{-1}(x)$ در فاصلهٔ $(-1, 2)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　۲) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$　　۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$　　۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

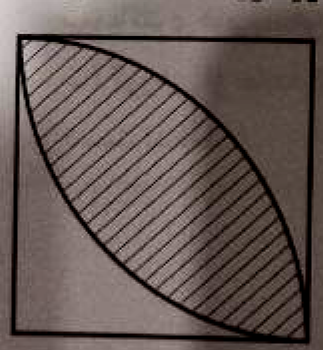
۱۵- در شکل زیر، خط L در نقطه a بر تابع $y = \sqrt{x}$ مماس است. آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت چهارضلعی ABCD هنگامی که a برابر $\frac{1}{4}$ است، کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$　　۴) $\frac{9}{16}$

۱۶- در شکل زیر دو ربع‌دایره، داخل مربع رسم شده است. آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت هاشورخورده، هنگامی که ضلع مربع ۲ می‌شود، کدام است؟



۱) $2\pi - 4$
۲) $2\pi - 8$
۳) $4 - \pi$
۴) $8\pi - 16$

۱۷- a عددی صحیح و $f(x)=\frac{x^2-ax}{2x+5}$ دارای ماکزیمم و مینیمم نسبی است. اگر a حداقل مقدار ممکن باشد، طـول مینیمم نسبی f چقدر بیشتر از a است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}-1$

۱۸- اگر $f(x)=x^3-5x^2+bx$ دارای نقطه بحرانی باشد، به‌ازای بیشترین عدد طبیعی b، فاصله نقطه بحرانی سمت راست از مبدأ چقدر است؟

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{14}$

۱۹- تابع $f(x)=(x-1)^2(x+2)^2$ مفروض است. اگر سه نقطه اکسترمم این تابع را به یکدیگر وصل کنیم، یک مثلث تشکیل می‌شود، مساحت این مثلث برابر با کدام است؟

۱) $\frac{243}{32}$ ۲) $\frac{243}{16}$ ۳) $\frac{234}{32}$ ۴) $\frac{234}{16}$

۲۰- دو تابع $f(x)=\frac{2x}{x^2+4}$ و $g(x)=\frac{-8x}{x^2+9}$ را در نظر بگیرید. اگر نقاط اکسترمم این دو تابع، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل دهند، محیط این چهارضلعی برابر کدام است؟

۱) $\frac{6\sqrt{157}+\sqrt{17}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{157}+6\sqrt{17}}{3}$

۳) $\frac{5\sqrt{37}+\sqrt{157}}{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{37}+5\sqrt{157}}{3}$

ریاضی

۱. گزینه ۳ درست است.

دو تابع یک ریشه مشترک دارند، پس داریم:

$$x_1^2 - 3x_1 + m = x_1^2 - nx_1 - 2 \Rightarrow (n-3)x_1 = -2 - m \Rightarrow x_1 = \frac{-m-2}{n-3}$$

از طرفی در معادلهٔ دوم، ضرب دو ریشه برابر ۲- است، پس داریم:

$$x_1 \times x_2 = -2 \Rightarrow \left(\frac{-(m+2)}{n-3}\right) \times x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{2n-6}{m+2}$$

۲. گزینه ۱ درست است.

باید Δ ی معادله مربع کامل باشد تا ریشه‌ها گویا شوند. پس داریم:

$$\Delta = (-11)^2 - 4(2)(b) = 121 - 8b$$

به‌ازای مقادیر طبیعی $b=1$ تا $b=15$، حاصل دلتا نامنفی است و داریم:

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Δ	113	105	97	89	81	73	65	57	49	41	33	25	17	9	1
					☑				☑			☑		☑	☑

پس به‌ازای پنج مقدار طبیعی b، ریشه‌های گویا داریم.

۳. گزینه ۱ درست است.

طول نقطه D، برابر با ریشه بزرگ‌تر تابع است. پس داریم:

$$2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

پس طول نقطه D برابر با ۴ است.

عرض از مبدأ سهمی برابر ۸- است، بنابراین هم عرض نقاط B و C برابر ۸- است. طول نقطه C را پیدا می‌کنیم:

$$2x^2 - 6x - 8 = -8 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

پس طول نقطه C برابر با ۳ است.

طول ضلع CD را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{C(3,-8),\,D(4,0)} CD = \sqrt{(3-4)^2 + (-8-0)^2} = \sqrt{65}$$

در نهایت خواسته سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{8 \times \frac{(3+4)}{2}}{8+3+4+\sqrt{65}} = \frac{28}{15+\sqrt{65}} \times \frac{15-\sqrt{65}}{15-\sqrt{65}} = \frac{28(15-\sqrt{65})}{225-65} = \frac{105-7\sqrt{65}}{40}$$

۴. گزینه ۴ درست است.

$y = 9x - x^2$ یک سهمی روبه پایین رأس که رأس آن در $S(\frac{9}{2}, \frac{81}{4})$ قرار دارد. پس $\sqrt{9x-x^2}$ حداکثر $\frac{9}{2}$ است و می‌تواند مقادیر صحیح ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ را اختیار کند.

یعنی ۵ مقدار صحیح مختلف را می‌پذیرد.

۵. گزینه ۲ درست است.

درصورتی‌که علامت سؤال، منفی باشد، آنگاه تابع یک سهمی روبه پایین با شرایط زیر است:

$$(a-۲)<۰ \Rightarrow a<۲$$

$$\Delta=۰ \Rightarrow ۴a^۲+۴a-۸=۰ \Rightarrow a^۲+a-۲=(a+۲)(a-۱)=۰$$

$$\xrightarrow{a<۲} \begin{cases} a=-۲ \\ a=۱ \end{cases}$$

در حالت دیگر، اگر علامت سؤال مثبت باشد، تابع یک تابع خطی با شیب مثبت و ضریب $x^۲$ برابر صفر خواهد بود:

$$a-۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

$$۲a>۰ \xrightarrow{a=۲} ۴>۰$$

بنابراین مجموع مقادیر مختلف برای a برابر $-۲+۱+۲=۱$ است.

۶. **گزینه ۲ درست است.**

$x=۱$ و $x=۵$ محل‌های تغییر علامت هستند و $x=۲$ حتماً ریشه‌ای است که عبارت تغییر علامت نداده.

دو حالت داریم:

$$\frac{(\overset{x=۱}{\sqrt{x}-۱})(\overset{x=۲}{x^۳-۸})}{(\underset{x=۲}{x-۲})(\underset{x=۵}{x-۵})} \quad \text{یا} \quad \frac{(\overset{x=۱}{\sqrt{x}-۱})(\overset{x=۵}{x^۳-۱۲۵})}{\underset{x=۲}{(x-۲)^۲}}$$

پس در حالت اول: $a=-۴\ ,\ b=۴\ ,\ c=۱۲۵$

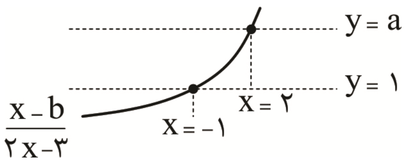
در حالت دوم: $a=-۷\ ,\ b=۱۰\ ,\ c=۸$

پس اختلاف دو مقدار ab می‌شود: $(-۱۶)-(-۷۰)=۵۴$

۷. **گزینه ۳ درست است.**

جواب نامعادله $a<\frac{x-b}{۲x+۳}<۱$ بازهٔ $(-۱,۲)$ شده است.

پس مثلاً چنین شکلی داریم:



یعنی در نقاط با طول ۲ و ۱- ، مقدار $\frac{x-b}{۲x+۳}$ برابر ۱ و a می‌شود:

حالت اول:

$$x=-۱ \Rightarrow \frac{-۱-b}{۱}=a \xrightarrow{b=-۵} a=۴$$

$$x=۲ \Rightarrow \frac{۲-b}{۷}=۱ \Rightarrow b=-۵$$

$$\Rightarrow a\times b=۴(-۵)=-۲۰$$

حالت دوم:

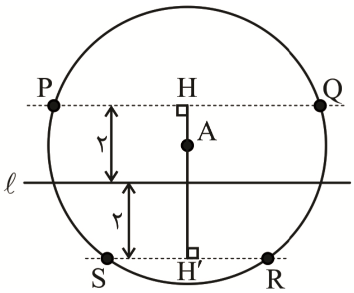
$$x=-۱ \Rightarrow \frac{-۱-b}{۱}=۱ \Rightarrow b=-۲$$

$$x=۲ \Rightarrow \frac{۲-b}{۷}=a \xrightarrow{b=-۲} a=\frac{۴}{۷}$$

اما a باید بیشتر از ۱ باشد، پس این حالت قبول نیست.

پس نامعادله به‌صورت $۴<\frac{x+۵}{۲x+۳}<۱$ با مجموعه جواب $(-۱,۲)$ بوده است.

۸. گزینه ۲ درست است.



نقاطی که از A به فاصلهٔ $\sqrt{۱۰}$ باشند، روی دایره به مرکز A و شعاع $\sqrt{۱۰}$ هستند.
نقاطی که از ℓ به فاصله ۲ باشند، روی دو خط موازی ℓ در بالا و پایین به فاصلهٔ ۲ هستند.
پس نقاط مشترک رئوس ذوزنقه $PQRS$ هستند و داریم:

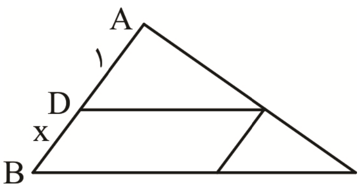
$$AH = ۱\ ,\ AP = \sqrt{۱۰}$$
$$\Rightarrow PH = ۳ \Rightarrow PQ = ۶$$
$$AH' = ۳\ ,\ AR = \sqrt{۱۰} \Rightarrow H'R = ۱ \Rightarrow SR = ۲$$

یعنی قاعده‌های ذوزنقه $PQ = ۶$ و $SR = ۲$ و ارتفاعش $HH' = ۴$ است و مساحتش می‌شود:

$$\frac{(۶+۲)۴}{۲} = ۱۶$$

۹. گزینه ۱ درست است.

اگر D ضلع AB را به نسبت ۱ به x تقسیم کند، مثلث بالا و کل شکل به نسبت $\frac{۱}{x+۱}$ متشابه‌اند، پس نسبت مساحت‌ها $\frac{۱}{(x+۱)^۲}$ است.



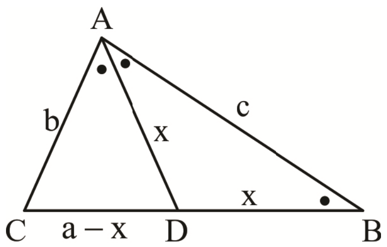
همچنین مثلث کوچک سمت راست با شکل اصلی به نسبت $\frac{x}{x+۱}$ متشابه‌اند، پس نسبت مساحت‌هایشان $\frac{x^۲}{(x+۱)^۲}$ است. پس سهم متوازی‌الاضلاع برابر است با:

$$۱ - \frac{۱}{(x+۱)^۲} - \frac{x^۲}{(x+۱)^۲} = \frac{۴۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۲x}{(x+۱)^۲} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = ۵x$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

و نسبت می‌شود: $\frac{۱}{\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}} = \frac{۱}{x}$ یا $\frac{۲}{۳\pm\sqrt{۵}}$

۱۰. گزینه ۱ درست است.

در شکل روبه‌رو AD نیم‌ساز است.



$$\hat{A} = ۲\hat{B} \Rightarrow C\hat{A}D = D\hat{A}B = \hat{B}$$

پس مثلث ADB متساوی‌الساقین است و داریم: $AD = DB = x$

حالا مثلث ACD و ABC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{x}{c} = \frac{a-x}{b} = \frac{b}{a}$$

روبه‌روی $\hat{C}$ ‌‌ روبه‌روی B و CAD

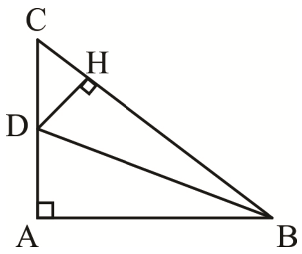
پس $x = \frac{bc}{a}$ و با ترکیب دو کسر اول داریم:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + bc \Rightarrow bc = a^۲ - b^۲$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \frac{a^۲ - b^۲}{a}$$

۱۱. **گزینه ۳ درست است.**



با توجه به اینکه ارتفاع دو مثلث BAD و BDC یکسان است، نسبت قاعده‌های این دو مثلث برابر با نسبت مساحت‌هایشان خواهد بود.

همچنین هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است؛ بنابراین $AD = DH$.

حال نسبت مساحت‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{S_{BDC}}{S_{BAD}} = \frac{\frac{۱}{۲}\times DH\times(a+۸)}{\frac{۱}{۲}\times a\times AD} = \frac{a+۸}{a} = \frac{۱۳}{۵} \Rightarrow a = ۵$$

با توجه به اینکه مثلث قائم‌الزاویه است و دو ضلع را داریم: ضلع AC را به‌دست می‌آوریم:

$$AC = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

با توجه به اینکه $\frac{CD}{AD} = \frac{۱۳}{۵}$، داریم:

$$CD = \frac{۱۳}{۵}AD \Rightarrow AD + CD = AD + \frac{۱۳}{۵}AD \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱۸}{۵}AD \Rightarrow AD = \frac{۵}{۱۸}\times ۱۲ = \frac{۱۰}{۳}$$

۱۲. **گزینه ۲ درست است.**

طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{۲}{۱} = \frac{۳+x}{۳-x} \Rightarrow x = ۱$$

همچنین با توجه به اینکه زاویه A در دو مثلث ADE و ABC مشترک است و نسبت اضلاع باهم تناسب دارند، داریم:
(دقت کنید $EC = (۲+x)+(۳-x) = ۵$)

$$\frac{\overbrace{AE}^{۱}}{\underbrace{AB}_{۳}} = \frac{\overbrace{AD}^{۲}}{\underbrace{AC}_{۶}} = \frac{\overbrace{DE}^{۲x+۱}}{\underbrace{BC}_{۳y+۳}} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۲x+۱}{۳y+۳} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۳y+۳} \Rightarrow y = ۲$$

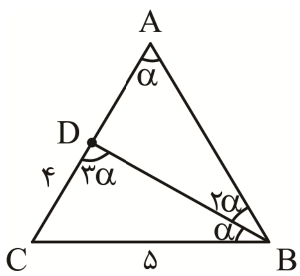
بنابراین:

$$x + y = ۱ + ۲ = ۳$$

۱۳. **گزینه ۲ درست است.**

با توجه به اطلاعات داده‌شده و اینکه زاویه $\widehat{BDC}$، زاویه خارجی مثلث ABD است، شکل به‌صورت زیر خواهد بود:

بنابراین دو مثلث ABC و DBA با هم متشابه هستند:



$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{BD}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{AD+۴}{۵} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow AD + ۴ = \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow AD = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

۱۴. **گزینه ۱ درست است.**

آهنگ متوسط تغییر $f^{-۱}$ در فاصله $(-۱,۲)$ برابر است با:

$$\frac{f^{-۱}(۲) - f^{-۱}(-۱)}{۲+۱}$$

در تابع $f(x) = x - \frac{۲}{x}\,,\ x > ۰$ داریم:

$$b = f^{-۱}(-۱) \Rightarrow f(b) = -۱ \Rightarrow b - \frac{۲}{b} = -۱ \Rightarrow b = ۱$$

$$c=f^{-1}(2)\Rightarrow f(c)=c-\frac{2}{c}=2\Rightarrow c^2-2c-2=0\xrightarrow[C>0]{}c=1+\sqrt{3}$$

پس جواب آهنگ متوسط تغییر می‌شود: $\frac{\sqrt{3}+1-1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۵. گزینه ۴ درست است.

شیب خط مماس بر تابع (خط L) برابر با مقدار مشتق تابع در نقطه $x=a$ است. با پیدا کردن شیب و جایگذاری یک نقطه، معادله خط را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\xrightarrow{x=a}m=\frac{1}{2\sqrt{a}}\Rightarrow L:y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+b\xrightarrow{(a,\sqrt{a})}\sqrt{a}=\frac{a}{2\sqrt{a}}+b\Rightarrow b=\frac{\sqrt{a}}{2}$$

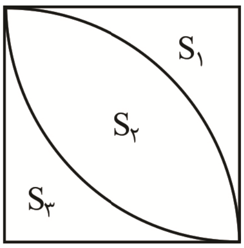
بنابران معادله خط به‌صورت $y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2}$ و عرض نقطه B برابر $\frac{\sqrt{a}}{2}$ خواهد بود.

مساحت ذوزنقه و سپس آهنگ تغییر لحظه‌ای را حساب می‌کنیم:

$$S=a\times\frac{(\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{a})}{2}=\frac{3}{4}\times a^{\frac{3}{2}}\Rightarrow S'=\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times a^{\frac{1}{2}}\xrightarrow{a=\frac{1}{4}}S'=\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

۱۶. گزینه ۱ درست است.

اگر مساحت‌های تشکیل‌شده در مربع به ضلع a را به‌صورت روبه‌رو نام‌گذاری کنیم، داریم:



$$S_1=S_3=a^2-\frac{1}{4}(\pi a^2)$$

$$S_1+S_2+S_3=a^2\Rightarrow S_2=a^2-2S_1=\frac{\pi}{2}a^2-a^2$$

مشتق می‌گیریم:

$$S_2'=\pi a-2a\xrightarrow{a=2}S_2'=2\pi-4$$

۱۷. گزینه ۱ درست است.

در تابع $f(x)=\frac{x^2-ax}{2x+5}$ مشتق به‌صورت $f'(x)=\frac{2x^2+10x-5a}{(2x+5)^2}$ است و باید دلتای صورت آن مثبت باشد تا اکسترمم داشته باشیم. پس:

$$\Delta_{f'}=100+40a>0\Rightarrow a>-2/5\xrightarrow{a\in\mathbb{Z}}a_{min}=-2$$

یعنی کمترین مقدار a برابر ۲- است.

پس داریم:

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{2x+5}$$

و مشتق آن $f'(x)=\frac{2x^2+10x+10}{(2x+5)^2}$ است.

علامت مشتق به صورت

	x_1		x_2	
+	0	−	0	+

است و اکسترمم با طول بزرگ‌تر، مینیمم است.

$$2x^2+10x+10=0\Rightarrow x^2+5x+5=0\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x_{min}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{5}{2}$$

$$x_{min}-a=\frac{\sqrt{۵}}{۲}-\frac{۵}{۲}-(-۲)=\frac{\sqrt{۵}}{۲}-\frac{۱}{۲}$$

۱۸. گزینه ۳ درست است.

مشتق به‌صورت $f'(x)=۳x^۲-۱۰x+b$ است که باید ریشه داشته باشد، پس $\Delta_{f'}=۱۰۰-۱۲b\ge ۰$ یعنی عدد طبیعی b حداکثر ۸ است و داریم:

$$f'(x)=۳x^۲-۱۰x+۸=۰ \Rightarrow (۳x-۴)(x-۲)=۰$$

یعنی نقاط بحرانی در $x=۲$ و $x=\frac{۴}{۳}$ قرار دارند و مختصات نقطه بحرانی سمت راست $A(۲,۴)$ است:

$$y_A=۲^۳-۵(۲)^۲+۸(۲)=۲۴-۲۰=۴$$

و داریم:

$$\text{فاصله از مبدأ}=OA=\sqrt{x_A^۲+y_A^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=۲\sqrt{۵}$$

۱۹. گزینه ۱ درست است.

در نقاط اکسترمم مشتق تابع برابر صفر است، پس داریم:

$$f(x)=(\underbrace{(x-۱)(x+۲)}_{x^۲+x-۲})^۲ \Rightarrow f'(x)=۲\times(۲x+۱)\times(x^۲+x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \\ x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

قاعده مثلث بین دو نقطه $(-۲,۰)$ و $(۱,۰)$ قرار دارد که طولش برابر $۱-(-۲)=۳$ است.

برای ارتفاع مثلث، باید عرض نقطه سوم را پیدا کنیم:

$$y=(-\frac{۱}{۲}-۱)^۲(-\frac{۱}{۲}+۲)^۲=\frac{۹}{۴}\times\frac{۹}{۴}=\frac{۸۱}{۱۶}$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\times۳\times\frac{۸۱}{۱۶}=\frac{۲۴۳}{۳۲}$$

۲۰. گزینه ۲ درست است.

از دو تابع مشتق می‌گیریم تا نقاط اکسترمم را پیدا کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲(x^۲+۴)-(۲x)(۲x)}{(x^۲+۴)^۲}=۰ \Rightarrow ۸-۲x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm۲$$

$$g'(x)=\frac{-۸(x^۲+۹)-(-۸x)(۲x)}{(x^۲+۹)^۲}=۰ \Rightarrow ۸x^۲-۷۲=۰ \Rightarrow x=\pm۳$$

بنابراین نقاط به‌صورت زیر خواهند بود:

$$A(-۳,\frac{۴}{۳}),\ B(-۲,-\frac{۱}{۲}),\ C(۲,\frac{۱}{۲}),\ D(۳,-\frac{۴}{۳})$$

با حساب کردن دو ضلع AB و BC، محیط چهارضلعی را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(-۳-(-۲))^۲+(\frac{۴}{۳}-(-\frac{۱}{۲}))^۲}=\sqrt{۱+\frac{۱۲۱}{۳۶}}=\frac{\sqrt{۱۵۷}}{۶}$$

$$BC=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{۱۷}$$

$$\text{محیط} = ۲(\frac{\sqrt{۱۵۷}}{۶} + \sqrt{۱۷}) = \frac{\sqrt{۱۵۷} + ۶\sqrt{۱۷}}{۳}$$

۱۱۱- در یک کلاس ۵۰ نفری، ۲۴ نفر عضو گروه ورزشی و ۲۳ نفر عضو گروه هنری هستند، اگر ۵ نفر عضو هیچکدام از این دو گروه نباشند، چند نفر فقط عضو گروه هنری هستند؟

۱) ۲۰　　۲) ۲۱　　۳) ۱۶　　۴) ۱۸

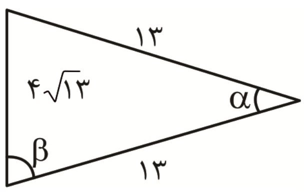
۱۱۲- بزرگ‌ترین مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2+ax+b}{x+c}\le 0$ به‌صورت $(-\infty,-3)\cup[1,2]$ است. حاصل $2a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) -1　　۳) ۱۱　　۴) -11

۱۱۳- تاسی را پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم عدد رو شده، اول نیست. اگر این عدد را به‌جای x در معادلهٔ $\sqrt{\frac{9x}{9x-8}}+6\sqrt{1-\frac{8}{9x}}=9$ قرار دهیم، با چه احتمالی در این معادله صدق می‌کند؟

۱) صفر　　۲) $\frac{1}{6}$　　۳) $\frac{1}{3}$　　۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۴- در شکل مقابل $[\sin\alpha]+[\sin\beta]$ کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)



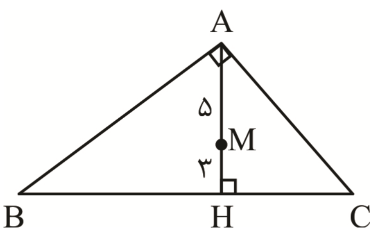
۱) ۱　　۲) ۲

۳) صفر　　۴) غیرقابل محاسبه

۱۱۵- اگر $\sin x-\sin y=\frac{2}{3}$ و $\tan x\times\tan y=1$ و زوایای x و y در ربع اول دایره مثلثاتی باشند، حاصل عبارت $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{4\sqrt{14}}{7}$　　۲) $\frac{2\sqrt{14}}{7}$　　۳) $\frac{4\sqrt{14}}{13}$　　۴) $\frac{23\sqrt{14}}{91}$

۱۱۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، $AM=5$ و $MH=3$ است. از رأس C به نقطهٔ M وصل‌کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در نقطه E قطع کند و $CM=ME$ شود. طول AB کدام است؟



۱) ۵　　۲) ۱۰

۳) $8\sqrt{5}$　　۴) $4\sqrt{5}$

۱۱۷- دو برابر چارک دوم داده‌های $\binom{۱۵}{۴}$ و $\binom{۱۵}{۵}$ و $\binom{۱۵}{۶}$ و $\binom{۱۵}{۷}$ را با چارک سوم داده‌های $\binom{۱۶}{۶}$ و $\binom{۱۶}{۷}$ و ... و $\binom{۱۶}{۱۱}$ جمع می‌کنیم، حاصل برابر کدام است؟

۱) $\binom{۱۵}{۶}+\binom{۱۶}{۶}$ ۲) $۲\binom{۱۶}{۶}$ ۳) $\binom{۱۶}{۷}$ ۴) $\binom{۱۷}{۱۰}$

۱۱۸- معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB، به مختصات $A(-۲a,b)$ و $B(b,۰)$ به‌صورت $y=-x+۱$ است، فاصله مبدأ مختصات از نقطهٔ A کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۱۹- نقطهٔ $(-۲,۲)$ رأس یک تابع درجهٔ دوم است که نمودار آن پاره‌خطی به‌طول ۱۰ واحد روی محور xها جدا می‌کند. نمودار این تابع محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳۱}{۲۵}$ ۲) $\frac{۳۹}{۲۵}$ ۳) $\frac{۴۲}{۲۵}$ ۴) $\frac{۴۹}{۲۵}$

۱۲۰- اگر معادلهٔ $-۱=\frac{۲}{ax}+\frac{ax}{۳x-۴}$ دارای جواب $x=۱$ باشد، با فرض $a>۰$ معادلهٔ $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+۱+a}=۱$ چند جواب دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) فاقد جواب ۴) بی‌شمار

۱۲۱- a و b و c، به‌ترتیب جملات چهارم، اول و هفتم از یک دنبالهٔ حسابی هستند. اگر $۰/۵a$ و $۲/۵b$ و $۱۲/۵C$ تشکیل یک دنبالهٔ هندسی بدهند، قدرنسبت دنبالهٔ حسابی چند برابر b است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۲۲- در مثلث ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ اگر $AB=۶$ و $AC=۴$ مقدار $\tan(\hat{C}-\hat{B})$ کدام است؟

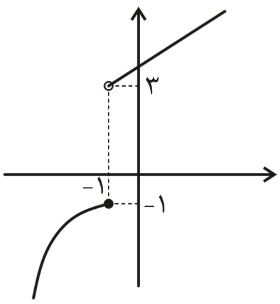
۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

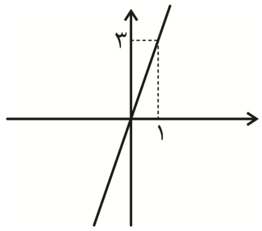
۱۲۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس C قائمه است، حاصل $\frac{۲}{۱+\tan\hat{A}}+\frac{۱}{۲\cot\hat{C}+۲}+\frac{۲}{۱+\tan\hat{B}}$ کدام است؟

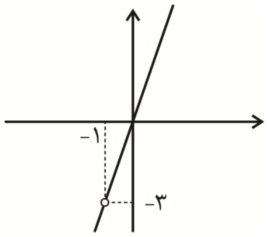
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$

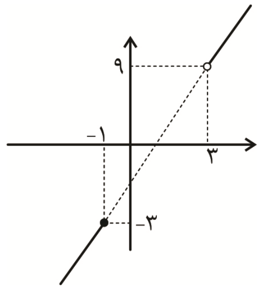
۳) ۱ ۴) ۲

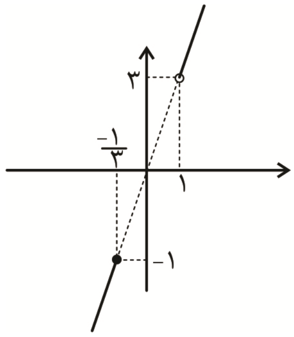
۱۲۴- اگر نمودار تابع $y = f(2x-1)$ به‌صورت زیر باشد. نمودار تابع $y = fof^{-1}(3x)$ کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۲۵- مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\log_3^2)^{2^x} < (\log_2^3)^{-x^2}$ شامل چند عدد صحیح در بازهٔ $[-5,5]$ است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۱۲۶- اگر $A = \dfrac{1}{\log_{60}^{12}} - \dfrac{1}{\log_5^{12}}$ و $B = \log_2^{0/0625}$ باشند، حاصل $A \times B$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) -4 ۴) -5

۱۲۷- اگر $f(x) = x - [x] - \dfrac{3}{2}$ و $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ باشند، آنگاه تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع gof کدام است ؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۱۲۸- به ۱۵ داده‌آماری با میانگین ۱۸ و ضریب تغییرات $\dfrac{2}{9}$، داده‌های ۱۳ و ۱۷ را اضافه کرده و دادهٔ ۱۲ را حذف می‌کنیم.

واریانس ۱۶ دادهٔ حاصل چقدر است؟

۱) ۱۴/۱۲۵ ۲) ۱۴/۲۵۰ ۳) ۱۴/۳۷۵ ۴) ۱۴/۶۲۵

۱۲۹- ۵ مرد و ۳ زن در یک صف قرار می‌گیرند، احتمال اینکه افراد هم‌جنس کنارهم باشند، چند برابر احتمال این است که هیچ دو زنی کنارهم نباشند؟

۱) ۱۰ ۲) $\dfrac{1}{10}$ ۳) $\dfrac{1}{20}$ ۴) ۲۰

۱۳۰- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=(۲۷x^{۲}+۹)(x-۱)$ به‌صورت $f^{-۱}(x)=\dfrac{\sqrt[۳]{x+b}+a}{c}$ است، حاصل $a+b-c$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۳۱- اگر تابع $f(x)=(k-۲)x^{۲}-kx+۵$ در بازه $(-\infty,۵]$ اکیداً نزولی باشد، چند مقدار صحیح برای k وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

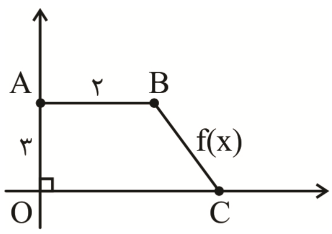
۱۳۲- مجموعه جواب معادلهٔ مثلثاتی $\dfrac{\sin ۴x+\sin ۲x}{\sin ۲x}-\sin^{۲} x=\cos^{۲} x$ کدام است؟

۱) $k\pi+\dfrac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi-\dfrac{\pi}{۴}$ ۳) $\dfrac{k\pi}{۲}$ ۴) $\dfrac{k\pi}{۲}+\dfrac{\pi}{۴}$

۱۳۳- حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} \dfrac{۳x-۱}{x^{۲}-۲\sqrt{x+۲}}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}$ ۳) $+\infty$ ۴) $-\dfrac{۳}{۴}$

۱۳۴- مساحت ذوزنقهٔ زیر برابر با ۱۲ است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(۲+۳h^{۲})-f(۲+h^{۲})}{۲h^{۳}+h^{۲}}$ کدام است؟



۱) $\dfrac{۳}{۴}$ ۲) $\dfrac{-۳}{۴}$ ۳) $\dfrac{-۳}{۲}$ ۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۱۳۵- $A(۴,۰)$ نقطه‌ای روی محور طول‌ها و T نقطه‌ای روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ هستند. اگر AT برخط مماس بر منحنی در نقطهٔ T عمود باشد. طول AT کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۱۱}}{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۱۱}$

۱۳۶- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است در لحظهٔ $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطهٔ $V(t)=۴۰(۱-\dfrac{t}{۱۰۰})^{۲}$ به‌دست آید، آهنگ متوسط تغییر حجم مایعی که از ظرف خارج می‌شود، در بازهٔ $[۰,۱]$ چقدر است؟

۱) $۰/۷۹۶$ ۲) $-۰/۷۹۶$ ۳) $-۷۹/۶$ ۴) $۷۹/۶$

۱۳۷- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید. در زوج نقطه‌های متمایز x_1 و x_2 خطوط مماس بر منحنی باهم موازی‌اند. مینیمم فاصلهٔ بین این زوج نقطه‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{2}$
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $4\sqrt{2}$

۱۳۸- تابع $f(x)=(x-1)\left|x^3-x^4\right|$ روی بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{3}{5}$
۳) $\frac{2}{5}$
۴) $\frac{4}{5}$

۱۳۹- یک بیضی بر خطوط $x=7$, $x=-1$, $y=5$, $y=-1$ مماس است. اگر قطرهای آن موازی محورهای مختصات باشند، دایره‌ای که دو سر قطر آن، کانون‌های بیضی هستند، محور افقی را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) $3\pm\sqrt{3}$
۲) $2\pm\sqrt{3}$
۳) $3\pm\sqrt{5}$
۴) $2\pm\sqrt{5}$

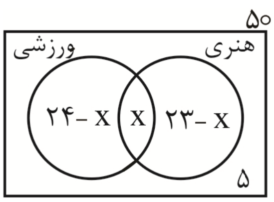
۱۴۰- سکه‌ای را ۳ بار می‌اندازیم و به تعداد «رو»های ظاهرشده تاس می‌ریزیم، با کدام احتمال در تمام تاس‌های ریخته‌شده، عدد ظاهرشده، مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{23}{216}$
۲) $\frac{33}{216}$
۳) $\frac{37}{216}$
۴) $\frac{47}{216}$

ریاضی

۱۱۱. گزینه ۲ درست است.

اگر تعداد افراد مشترک دو گروه را با x نشان دهیم، در نمودار ون داریم:



$$(۲۴-x)+x+(۲۳-x)+۵=۵۰ \Rightarrow x=۲$$

فقط هنری : $۲۳-x=۲۳-۲=۲۱$

۱۱۲. گزینه ۲ درست است.

با توجه به مجموعه جواب داده‌شده برای نامعادله، $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های صورت و $x=-۳$ ریشهٔ مخرج است. یعنی:

$$\frac{x^۲+ax+b}{x+c}=\frac{(x-۱)(x-۲)}{x+۳}=\frac{x^۲-۳x+۲}{x+۳}$$

درنتیجه $a=-۳$ و $b=۲$ و $c=۳$ و حاصل $۲a+b+c$ برابر -۱ است.

۱۱۳. گزینه ۳ درست است.

اگر عبارت زیر رادیکال دوم را مخرج مشترک بگیریم، به‌عبارت $\frac{۹x-۸}{۹x}$ می‌رسیم حالا از آنجا که معکوس این عبارت هم در زیر رادیکال اول قرار داد، از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{۹x}{۹x-۸}}=T \Rightarrow \sqrt{۱-\frac{۸}{۹x}}=\sqrt{\frac{۹x-۸}{۹x}}=\frac{۱}{T}$$

پس‌داریم:

$$T+۶(\frac{۱}{T})=۹ \xrightarrow{\times T} T^۲-۹T+۶=۰ \Rightarrow (T-۳)^۲=۰ \Rightarrow T=۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{۹x}{۹x-۸}}=۳ \Rightarrow \frac{۹x}{۹x-۸}=۹ \Rightarrow \frac{x}{۹x-۸}=۱ \Rightarrow x=۹x-۸ \Rightarrow x=۱$$

پس پیشامد مطلوب $A=\{۱\}$ و فضای نمونه‌ای این احتمال شرطی، $S=\{۱,۴,۶\}$ است و احتمال موردنظر برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

روش دوم: می‌توانیم اعداد غیر اول روشده در پرتاب تاس یعنی $x=۱,۴,۶$ را در معادله جایگزین کنیم و ببینیم کدام‌یک در معادله صدق می‌کنند.

۱۱۴. گزینه ۳ درست است.

α و β زوایایی غیرقائم در محدودۀ $(۰^\circ , ۱۸۰^\circ)$ هستند و سینوس آن‌ها همواره در بازۀ $(۰,۱)$ است و جزء صحیح آن‌ها صفر می‌شود.

۱۱۵. گزینه ۴ درست است.

x و y دو زاویه حاده‌اند و $\tan x \times \tan y=۱$، پس:

$$\tan x=\frac{۱}{\tan y} \Rightarrow \tan x=\cot y$$

یعنی x و y متمم هم هستند و $\sin y=\cos x$، پس به‌جای رابطهٔ $\sin x-\sin y=\frac{۲}{۳}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin x-\cos x=\frac{۲}{۳}$$

حالا طرفین این عبارت را به توان دو می‌رسانیم:

$$\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}-۲\sin x\cos x=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۲\sin x\cos x=\frac{۵}{۹} \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{۵}{۱۸}$$

مقدار $\sin x+\cos x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(\sin x+\cos x)^۲=\sin^۲ x+\cos^۲ x+۲\sin x\cos x=۱+\frac{۵}{۹}=\frac{۱۴}{۹}$$

$$\Rightarrow |\sin x+\cos x|=\frac{\sqrt{۱۴}}{۳} \xrightarrow{\text{در ربع اول } x} \sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}$$

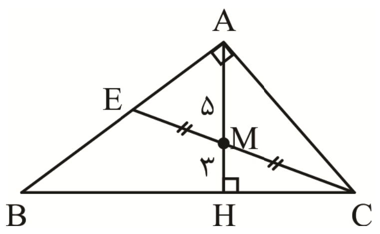
حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin^۳ x-\cos^۳ x}{\sin^۳ x+\cos^۳ x}=\frac{(\sin x-\cos x)(\overbrace{\sin^۲ x+\sin x\cos x+\cos^۲ x}^{۱})}{(\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^۲ x-\sin x\cos x+\cos^۲ x}_{۱})}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}(۱+\frac{۵}{۱۸})}{\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}(۱-\frac{۵}{۱۸})}=\frac{\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۳}{۱۸}}{\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}\times\frac{۱۳}{۱۸}}=\frac{۲\times۲۳}{۱۳\sqrt{۱۴}}\times\frac{\sqrt{۱۴}}{\sqrt{۱۴}}=\frac{۲\times۲۳\sqrt{۱۴}}{۱۳\times۱۴}=\frac{۲۳\sqrt{۱۴}}{۱۳\times۷}=\frac{۲۳\sqrt{۱۴}}{۹۱}$$

۱۱۶. گزینه ۳ درست است.

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEC، از آنجا که $CM = ME$، پس پاره‌خط AM، میانهٔ وارد بر وتر EC است و لذا:

$$CM = ME = AM = ۵$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویه MHC، از آنجا که $\begin{cases} CM = ۵ \\ HM = ۳ \end{cases}$، پس طبق فیثاغورس $HC = ۴$ است.

نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویه ABC، با دو بار استفاده از روابط طولی داریم:

$$\begin{cases} AH^۲ = BH \times HC \Rightarrow ۸^۲ = BH \times ۴ \Rightarrow BH = ۱۶ \\ AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = ۱۶ \times ۲۰ \Rightarrow AB = ۴ \times ۲\sqrt{۵} = ۸\sqrt{۵} \end{cases}$$

۱۱۷. گزینه ۴ درست است.

داده‌های هر دو گروه را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

گروه اول: $\binom{۱۵}{۴}, \binom{۱۵}{۵}, \binom{۱۵}{۶}, \binom{۱۵}{۷}$

$$Q_۲ = \text{میانه} = \text{میانگین دو دادهٔ وسط} = \frac{\binom{۱۵}{۵} + \binom{۱۵}{۶}}{۲}$$

گروه دوم: $\underbrace{\binom{۱۶}{۱۱}}_{\binom{۱۶}{۵}}, \binom{۱۶}{۶}, \underbrace{\binom{۱۶}{۱۰}}_{\binom{۱۶}{۶}}, \binom{۱۶}{۷}, \underbrace{\binom{۱۶}{۹}}_{\binom{۱۶}{۷}}, \binom{۱۶}{۸}$

$$Q_۳ = \binom{۱۶}{۹} = \binom{۱۶}{۷}$$

پس داریم:

$$۲Q_۲ + Q_۳ = \underbrace{\binom{۱۵}{۵} + \binom{۱۵}{۶}}_{\binom{۱۶}{۶}} + \binom{۱۶}{۷}$$

می‌دانیم که $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+۱} = \binom{n+۱}{r+۱}$، پس:

$$\binom{۱۵}{۵} + \binom{۱۵}{۶} = \binom{۱۶}{۶}$$

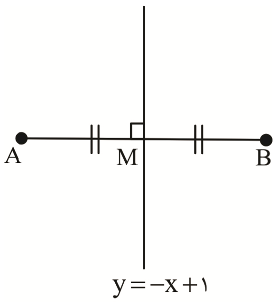
و مجدداً با استفاده از همین قانون داریم:

$$\binom{۱۶}{۶} + \binom{۱۶}{۷} = \binom{۱۷}{۷} = \binom{۱۷}{۱۰}$$

۱۱۸. گزینه ۳ درست است.

با توجه به‌شکل چون نقطه M وسط پاره خط AB است، می‌توان نوشت: $M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$

$$M = (\frac{-۲a + b}{۲} \text{ و } \frac{b}{۲})$$



و چون نقطه M روی عمودمنصف قرار دارد، پس مختصات آن در $y = -x + ۱$ صدق می‌کند.

$$\frac{b}{۲} = \frac{۲a - b}{۲} + ۱ \Rightarrow b = ۲a - b + ۲ \Rightarrow ۲b = ۲a + ۲ \Rightarrow \boxed{b = a + ۱}$$

و می‌دانیم شیب پاره‌خط AB عکس و قرینه شیب عمودمنصف است.

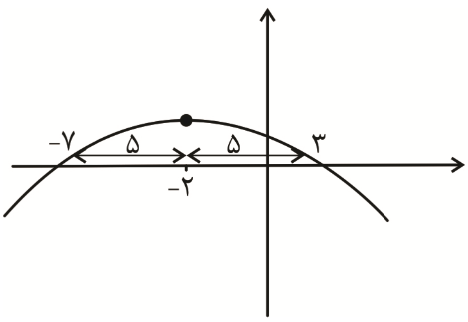
$$m_{AB}=۱\to m_{AB}=\frac{b-۰}{-۲a-b}=۱\Rightarrow b=-۲a-b\Rightarrow ۲b=-۲a\Rightarrow \boxed{b=-a}$$

با حل دستگاه $\begin{cases}b=a+۱\\ b=-a\end{cases}$ به $\begin{cases}a=\frac{-۱}{۲}\\ b=\frac{۱}{۲}\end{cases}$ می‌رسیم.

پس مختصات A به‌صورت $(\frac{۱}{۲}$ و $۱)$ و فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات برابر با $\frac{\sqrt{۵}}{۲}=\sqrt{۱+\frac{۱}{۴}}$ است.

۱۱۹. گزینه ۳ درست است.

معادلهٔ سهمی با رأس $(۲$ و $-۲)$ به‌صورت $y=a(x+۲)^{۲}+۲$ است و با توجه به اطلاعات مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم و نقطه $(۳,۰)$ را در معادلهٔ قرار می‌دهیم.



$$۰=a\times(۲۵)+۲\to a=\frac{-۲}{۲۵}$$

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=\frac{-۲}{۲۵}(x+۲)^{۲}+۲$ است و عرض از مبدأ آن $y(۰)=\frac{-۸}{۲۵}+\frac{۲}{۱}=\frac{۴۲}{۲۵}$ است.

۱۲۰. گزینه ۱ درست است.

$x=۱$ در معادلهٔ اول صدق می‌کند:

$$\frac{a}{-۱}+\frac{۲}{a}=-۱\xrightarrow{\times a}-a^{۲}+۲=-a\to a^{۲}-a-۲=۰\xrightarrow{\quad}a=\begin{cases}-۱ & \text{غ ق ق}\\ ۲\end{cases}$$

$$a=۲\to\sqrt{x+۳}+\sqrt{x+۲}=۱\Rightarrow\sqrt{x+۳}=۱-\sqrt{x+۲}\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}}$$

$$\cancel{x}+۳=۱+(\cancel{x}+۲)-۲\sqrt{x+۲}\Rightarrow-۲\sqrt{x+۲}=۰\to x=-۲\ \text{ق.ق}$$

پس معادله یک جواب دارد.

۱۲۱. گزینه ۲ درست است.

$۰/۵a$ و $۲/۵b$ و $۱۲/۵C$ تشکیل یک‌دنبالهٔ هندسی می‌دهند. پس:

$$(۲/۵\,b)^{۲}=(۰/۵\,a)(۱۲/۵\,c)\Rightarrow(\frac{۵}{۲}b)^{۲}=(\frac{۱}{۲}a)(\frac{۲۵}{۲}c)\Rightarrow\frac{۲۵}{۴}b^{۲}=\frac{۲۵}{۴}ac\Rightarrow b^{۲}=ac$$

پس a و b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند.

از طرف دیگر همین سه عدد، جملات چهارم، اول و هفتم یک دنبالهٔ حسابی می‌باشند، به عبارتی قرار است جملات چهارم، اول و هفتم از یک دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند. در این صورت داریم: $q=-۲$

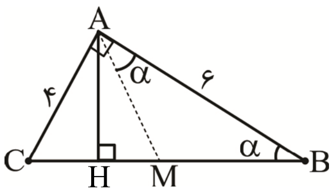
از طرفی در دنبالهٔ حسابی داریم:

$$a_{۴}\times(-۲)=a_{۱}\Rightarrow(a_{۱}+۳b)(-۲)=a_{۱}\Rightarrow-۲a_{۱}-۶d=a_{۱}\Rightarrow-۳a_{۱}=۶d\Rightarrow d=\frac{-۱}{۲}a_{۱}$$

$$\xrightarrow{a_{۱}=b}d=\frac{-۱}{۲}b$$

۱۲۲. گزینه ۱ درست است.

با توجه به‌شکل روبه‌رو با رسم ارتفاع AH و میانهٔ AM داریم:



$$AM = MB \Rightarrow M\hat{A}B = \hat{B} = \alpha$$

زاویه خارجی $A\hat{M}H = ۲\alpha \Rightarrow H\hat{A}M = ۹۰ - ۲\alpha = ۹۰ - ۲\hat{B} = \hat{B} + \hat{C} - ۲\hat{B} = \hat{C} - \hat{B}$

پس تانژانت زاویه HAM را می‌خواهیم که برابر است با:

$$\tan H\hat{A}M = \frac{HM}{AH}$$

از طرفی طبق روابط طولی داریم:

$$BC^۲ = \sqrt{۴^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۵۲}$$

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{۲۴}{\sqrt{۵۲}}$$

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow CH = \frac{AC^۲}{BC} = \frac{۱۶}{\sqrt{۵۲}}$$

$$HM = CM - CH = \frac{\sqrt{۵۲}}{۲} - \frac{۱۶}{\sqrt{۵۲}} = \frac{۲۰}{۲\sqrt{۵۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵۲}}$$

بنابراین:

$$\tan H\hat{A}M = \frac{۱۰}{۲۴} = \frac{۵}{۱۲}$$

۱۲۳. گزینه ۲ درست است.

روش اول: عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$۲\left(\frac{۱}{۱+\tan\hat{B}} + \frac{۱}{۱+\tan\hat{A}}\right) + \frac{۱}{۲(۰)+۲} = ۲\left(\frac{۲+\tan\hat{A}+\tan\hat{B}}{۱+\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\underbrace{\tan\hat{A}.\tan\hat{B}}_{۱}}\right) + \frac{۱}{۲} = ۲(۱) + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

روش دوم: $\hat{C} = ۹۰$ است و به‌جای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ زوایای دلخواهی که مجموعشان ۹۰° است، قرار می‌دهیم، مثلاً $\hat{A} = \hat{B} = ۴۵^\circ$، با جایگذاری این زوایا در عبارت موردنظر به عدد $\frac{۵}{۲}$ می‌رسیم.

۱۲۴. گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم که $fof^{-۱}(۳x) = ۳x$ است، اما باید:

$$۳x \in D_{f^{-۱}} \Rightarrow ۳x \in R_f$$

با توجه به نمودار داده‌شده:

$$R_f = R_{f(۲x-۱)} = (-\infty, -۱] \cup (۳, +\infty)$$

پس:

$$۳x \in (-\infty, -۱] \cup (۳, +\infty) \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-۱}{۳}\right] \cup (۱, +\infty)$$

این محدودهٔ x در گزینه ۴ آمده است.

۱۲۵. گزینه ۳ درست است.

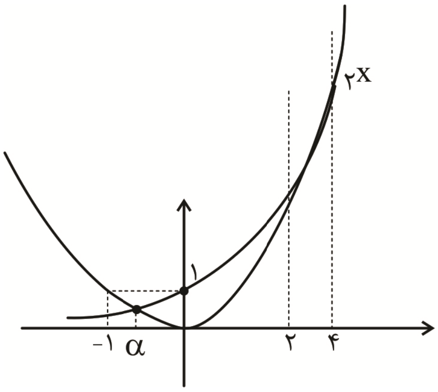
از آنجا که $\log_{۲}^{۳} = \frac{۱}{\log_{۳}^{۲}}$ است. پس داریم:

$$(\log \tfrac{۲}{۳})^{۲^x} < (\log \tfrac{۲}{۳})^{x^۲}$$

چون پایه نامساوی نمایی، عدد $\log_{۳}^{۲}$ است که عددی بین صفر و یک می‌باشد، پس جهت نامساوی عوض شده و داریم:

$$۲^x > x^۲$$

برای حل این نامعادله، از رسم نمودارهای توابع $y = ۲^x$ و $y = x^۲$ در یک دستگاه مختصات استفاده می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید، نمودار $y = ۲^x$، در بازهٔ $(\alpha, ۲)$ و $(۴ , +\infty)$ بالاتر از نمودار $y = x^۲$، قرار دارد، پس مجموعه جواب این نامعادله، شامل سه عدد صحیح $x = ۰,۱,۵$ در بازهٔ $[-۵ , ۵]$ است.

۱۲۶. گزینه ۳ درست است.

می‌دانیم $\log_{b}^{a} = \frac{۱}{\log_{a}^{b}}$ است.

$$A = \log_{۱۲}^{۶۰} - \log_{۱۲}^{۵} = \log_{۱۲}^{\frac{۶۰}{۵}} = ۱$$

پس:

$$B = \log_{۲}^{(\frac{۵}{۱۰})^۴} = ۴ \times \log_{۲}^{\frac{۱}{۲}} = -۴$$

بنابراین $A \times B = -۴$ است.

۱۲۷. گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم که $۰ \le x - [x] < ۱$ است، پس برای تابع $f(x) = x - [x] - \frac{۳}{۲}$ داریم:

$$\frac{-۳}{۲} \le x - [x] - \frac{۳}{۲} < \frac{-۱}{۲}$$

بنابراین خروجی تابع f، همواره عددی مخالف صفر است و در تابع gof، و در ضابطهٔ بالای تابع g قرار می‌گیرد. از طرفی خروجی f، عددی منفی است و تابع $y = \frac{|x|}{x}$ به‌ازای ورودی‌های منفی، همواره مقدار -۱ می‌دهد. پس نهایتاً با تابع ثابت $gof(x) = -۱$ طرفیم که همواره پیوسته است و هیچ ناپیوستگی ندارد.

۱۲۸. گزینه ۳ درست است.

جمع داده‌های اولیه $۱۵ \times ۱۸ = ۲۷۰$ است.

با اضافه کردن ۱۷ و ۱۳ و حذف ۱۲ داریم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{\text{جمع}}{\text{تعداد}} = \frac{۲۷۰ + ۱۷ + ۱۳ - ۱۲}{۱۵ + ۲ - ۱} = \frac{۲۸۸}{۱۶} = ۱۸$$

ضریب تغییرات اولیه $\frac{۲}{۹}$ است، پس:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{۲}{۹} = \frac{\sigma}{۱۸} \Rightarrow \sigma = ۴ \Rightarrow \sigma^{۲} = ۱۶$$

یعنی:

$$\frac{\sum (x_i - ۱۸)^{۲}}{۱۵} = ۱۶$$

پس مجموع مجذورات تفاضلات از ۱۸، برابر $۱۵ \times ۱۶ = ۲۴۰$ است و داریم:

$$\sigma^{۲}_{\text{جدید}} = \frac{۲۴۰ + (۱۷-۱۸)^{۲} + (۱۳-۱۸)^{۲} - (۱۲-۱۸)^{۲}}{۱۵ + ۲ - ۱} = \frac{۲۴۰ + ۱ + ۲۵ - ۳۶}{۱۶} = \frac{۲۳۰}{۱۶} = \frac{۱۱۵}{۸} = ۱۴{,}۳۷۵$$

۱۲۹. گزینه ۱ درست است.

حالت $(A$ اگر هر ۵ مرد را یک دسته و هر ۳ زن را یک دسته درنظر بگیریم، تعداد حالات قرارگرفتن افراد هم‌جنس کنارهم، $n(A) = ۲! \times ۳! \times ۵!$ است:

حالت $(B$ اگر بخواهیم هیچ دو زن کنارهم نباشند، ۵ مرد را مانند یک دیوار در نظر گرفته و ۳ زن را در ۶ فضای خالی بین مردها قرار می‌دهیم:

—●—●—●—●—●—

$$n(B) = \binom{۶}{۳} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابه‌جایی زن‌ها}} \times \underbrace{۵!}_{\text{جابه‌جایی مردها}}$$

نهایتاً داریم:

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{\binom{۶}{۳} \times ۳! \times ۵!}{۲! \times ۳! \times ۵!} = \frac{\binom{۶}{۳}}{۲} = ۱۰$$

۱۳۰. گزینه ۱ درست است.

تابع داده‌شده را به‌صورت مکعب دو جمله‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \underbrace{(۲۷x^{۳} - ۲۷x^{۲} + ۹x - ۱)}_{(۳x-۱)^{۳}} - ۸ = (۳x-۱)^{۳} - ۸ = y$$

$$\Rightarrow (۳x - ۱) = \sqrt[۳]{y + ۸} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[۳]{y+۸} + ۱}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{\sqrt[۳]{x+۸} + ۱}{۳} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۸ \\ c = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b - c = ۱ + ۸ - ۳ = ۶$$

۱۳۱. گزینه ۲ درست است.

برای اینکه تابع f در بازه داده‌شده اکیداً نزولی باشد، دو حالت داریم:

۱) نمودار تابع f یک سهمی روبه بالا بوده و طول رأس این سهمی، بزرگ‌تر مساوی ۵ باشد:

$$\begin{cases} k-2>0 \Rightarrow k>2 \\ -\dfrac{(-k)}{2k-4} \geq 5 \Rightarrow \dfrac{k-10k+20}{2k-4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{-9k+20}{2k-4} \geq 0 \Rightarrow 2<k \leq \dfrac{20}{9} \end{cases}$$

۲) تابع f یک تابع خطی با شیب منفی باشد:

$$\begin{cases} k-2=0 \Rightarrow k=2 \\ -k<0 \Rightarrow -2<0 \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین: $2 \leq k \leq \frac{20}{9}$ و در این بازه شامل یک عدد صحیح می‌باشد.

۱۳۲. گزینه ۴ درست است.

با ساده کردن معادلهٔ مثلثاتی داریم:

$$\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\sin 2x}=\sin^2 x+\cos^2 x \Rightarrow \frac{\sin 4x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin 2x}=1 \Rightarrow \frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x}=0$$

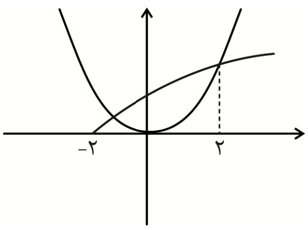
$$\Rightarrow 2\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

۱۳۳. گزینه ۳ درست است.

به جای x عدد ۲ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-1}{x^2-2\sqrt{x+2}}=\frac{5}{0}=\infty$$

نمودارهای دو تابع $y=x^2$ و $y=2\sqrt{x+2}$ را نیز در یک دستگاه محور مختصات رسم می‌کنیم.



در همسایگی راست $x=2$ مقادیر تابع $y=x^2$ از تابع $y=2\sqrt{x+2}$ بزرگ‌تر است، یعنی:

$$x^2-2\sqrt{x+2}>0 \to \lim_{x\to 2^+}\frac{3x-1}{x^2-2\sqrt{x+2}}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

۱۳۴. گزینه ۳ درست است.

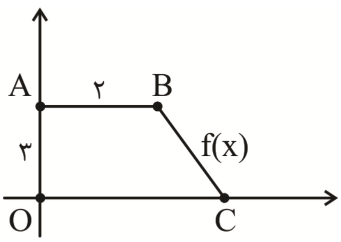
تعریف مشتق سؤال شده به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h^2)-f(2+h^2)}{2h^3+h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h^2)-f(2+h^2)}{h^2}=2f'_+(2)$$

از آنجا که طول رأس B از ذوزنقه، $x=2$ است. پس:

شیب پاره خط $BC=$ شیب خط مماس بر منحنی f در همسایگی راست $x=2$: $f'_+(2)$

برای پیداکردن شیب پاره خط BC، باید طول نقطه C را داشته باشیم. از آنجا که مساحت ذوزنقه برابر با ۱۲ است، داریم:



$$S=12 \Rightarrow \frac{(AB+OC)\times OA}{2}=12$$

$$\Rightarrow \frac{(2+OC)\times 3}{2}=12 \Rightarrow OC=6 \Rightarrow C(6,0)$$

شیب پاره‌خط واصل بین $B(۲,۳)$ و $C(۶,۰)$ برابر است با $\frac{-۳}{۴}$، پس:

$$f'_+(۲)=\frac{-۳}{۴}\Rightarrow ۲f'_+(۲)=\frac{-۳}{۲}$$

۱۳۵. گزینه ۳ درست است.

مختصات نقطهٔ T را به‌صورت $(x,\sqrt{x-۱})$ درنظر می‌گیریم و می‌دانیم که شیب خط مماس بر تابع در این نقطه برابر با $\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}$ است.

حالا شیب خط AT واصل بین نقاط $A(۴,۰)$ و $T(x,\sqrt{x-۱})$ را می‌یابیم:

$$m_{AT}=\frac{\sqrt{x-۱}-۰}{x-۴}=\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۴}$$

خط AT بر خط مماس بر منحنی در نقطهٔ T عمود است، پس حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر با -۱ است:

$$\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۴}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}=-۱\to\frac{۱}{۲(x-۴)}=-۱\to ۲x-۸=-۱\to x=\frac{۷}{۲}\to y=\sqrt{\frac{۵}{۲}}$$

$$\to T(\frac{۷}{۲},\sqrt{\frac{۵}{۲}})$$

طول پاره‌خط AT را به‌دست می‌آوریم:

$$AT=\sqrt{(۴-\frac{۷}{۲})^۲+(\sqrt{\frac{۵}{۲}})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۲}}=\sqrt{\frac{۱۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$$

۱۳۶. گزینه ۱ درست است.

دقت کنید که ضابطهٔ تابع بیانگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف داده‌شده است، پس ضابطهٔ تابع حجم مایع در حال خارج شدن از ظرف برابر است با:

$$F(t)=۴۰-V(t)\Rightarrow F(t)=۴۰-۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$$

حالا آهنگ متوسط تغییر این تابع در بازهٔ $[۰,۱]$ را می‌خواهیم، از آنجا که تابع $F(t)$ درجهٔ دو است، این مقدار برابر با آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطهٔ وسط بازه است، پس کافی است $f'(\frac{۱}{۲})$ را حساب کنیم:

$$F'(t)=-۴۰(۲)(۱-\frac{t}{۱۰۰})(\frac{-۱}{۱۰۰})=\frac{۴}{۵}(۱-\frac{t}{۱۰۰})$$

$$F'(\frac{۱}{۲})=\frac{۴}{۵}(۱-\frac{\frac{۱}{۲}}{۱۰۰})=\frac{۴}{۵}-\frac{۴}{۱۰۰۰}=۰/۸-۰/۰۰۴=۰/۷۹۶$$

۱۳۷. گزینه ۲ درست است.

مشتق‌های تابع در نقاط $x_۱$ و $x_۲$ با هم برابرند:

$$f'(x_۱)=f'(x_۲)\to\frac{-۱}{x_۱^۲}=\frac{-۱}{x_۲^۲}\to x_۱=\pm x_۲\xrightarrow{\text{متمایز}}x_۱=-x_۲$$

تابع بیانگر فاصلهٔ دو نقطه از هم را می‌نویسیم:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_2-(-x_2))^2+\left((\frac{1}{x_2}-(-\frac{1}{x_2})\right)^2}$$

$$=\sqrt{4x_2^2+\frac{4}{x_2^2}}=2\sqrt{x_2^2+\frac{1}{x_2^2}}$$

می‌دانیم که عبارت $x_2^2+\frac{1}{x_2^2}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است، پس:

$$d\geq 2\sqrt{2}$$

۱۳۸. گزینه ۲ درست است.

ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$f(x)=(x-1)\left|x^3(1-x)\right|=\begin{cases}-x^3(x-1)^2 & 0\leq x\leq 1\\ x^3(x-1)^2 & x<0 \text{ یا } x>1\end{cases}$$

از تابع مشتق می‌گیریم.

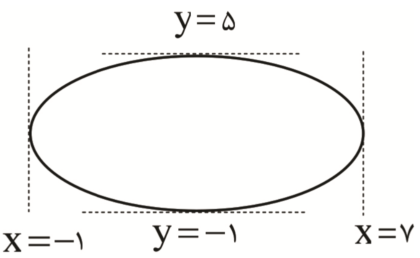
$$f'(x)=\begin{cases}-3x^2(x-1)^2-2(x-1)x^3=-(x-1)x^2(3(x-1)+2x) & 0\leq x\leq 1\\ 3x^2(x-1)^2+2(x-1)x^3=(x-1)x^2(3(x-1)+2x) & x<0 \text{ یا } x>1\end{cases}$$

جدول تعیین علامت مشتق را رسم می‌کنیم:

x		0		$\frac{3}{5}$		1	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

تابع روی بازهٔ $\left[0,\frac{3}{5}\right]$ اکیداً نزولی است، پس $b-a=\frac{3}{5}$

۱۳۹. گزینه ۱ درست است.



طول قطرهای بیضی برابر است با:

$$2b=5-(-1)=6$$
$$2a=7-(-1)=8$$

پس:

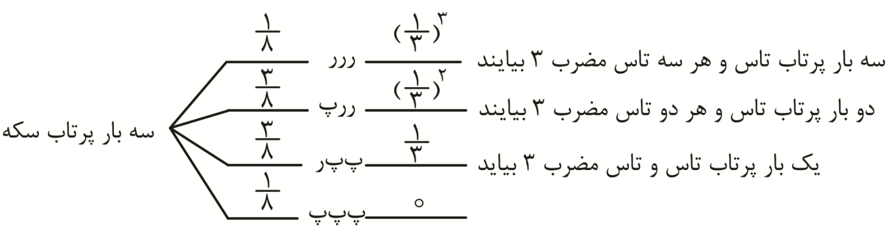
$$c^2=a^2-b^2=4^2-3^2=7$$
$$\Rightarrow c=\sqrt{7}$$

مرکز بیضی در وسط x و yها، یعنی در $O(3,2)$ قرار دارد، پس دایره به مرکز $O(3,2)$ و شعاع $r=c=\sqrt{7}$ داریم که معادله‌اش $(x-3)^2+(y-2)^2=\sqrt{7}^2$ است. با قرار دادن $y=0$ داریم:

$$(x-3)^2+4=7\Rightarrow (x-3)^2=3\Rightarrow x=3\pm\sqrt{3}$$

۱۴۰. گزینه ۳ درست است.

با استفاده از نمودار درختی داریم:



$$\frac{۱}{۸}(\frac{۱}{۳})^{۳}+\frac{۳}{۸}(\frac{۱}{۳})^{۲}+\frac{۳}{۸}(\frac{۱}{۳})+\frac{۱}{۸}(۰)$$

$$=\frac{۱}{۸}(\frac{۱}{۲۷})+\frac{۳}{۸}(\frac{۱}{۹})+\frac{۱}{۸}+۰=\frac{۱}{۸}(\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۳}+۱)=\frac{۱}{۸}(\frac{۱+۹+۲۷}{۲۷})=\frac{۱}{۸}(\frac{۳۷}{۲۷})=\frac{۳۷}{۲۱۶}$$

۱- A، B، C، D و E در محلّی سخنرانی می‌کنند، با کدام احتمال قبل از A، حداکثر یک نفر سخنرانی می‌کند؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۴۲ ۴) ۰/۴۸

۲- در ظرفی ۵ مهره سفید با شماره‌های ۱ تا ۶ و پنج مهره قرمز با شماره‌های ۱ تا ۶ داریم. دو تا مهره از این ظرف برمی‌داریم. با کدام احتمال جمع شماره‌های آن‌ها ۸ است؟

۱) $\frac{۵}{۲۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲۲}$ ۳) $\frac{۱}{۱۱}$ ۴) $\frac{۲}{۱۱}$

۳- در کیسه‌ای n مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سفید موجود است. به‌ترتیب و به‌طور متوالی ۳ مهره از کیسه خارج می‌کنیم اگر احتمال اینکه ۲ مهرهٔ اول و آخر قرمز و مهرهٔ دوم سفید باشد $\frac{۵}{۲۸}$ است. n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۷

۴- A و B دو پیشامد مستقل‌اند که احتمال رخ دادن حداقل یکی از آن‌ها ۰/۶۵، احتمال رخ دادن حداکثر یکی از آن‌ها ۰/۸۵ است. اگر $P(B) < P(B')$ باشد، مقدار $P(A-B)$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴۵

۵- در آزمایش پرتاب ۳ سکه، چند پیشامد دو عضوی وجود دارد که از آمدن «رو» در سکه اول، مستقل باشند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۶- در پرتاب سه تاس با هم اگر مجموع از ۸ بیشتر نباشد، با کدام احتمال سه عدد متفاوت ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۷- اگر $A \subseteq B$ و احتمال رخ ندادن پیشامد A به شرط رخ دادن پیشامد B برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، نسبت احتمال رخ دادن پیشامد B به احتمال رخ دادن پیشامد A کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۸- با اضافه کردن اعداد ۱۴، ۱۲، ۲۲ به ۱۵ دادهٔ آماری، ضریب تغییرات به ۲۵ درصد می‌رسد و میانگین ثابت می‌ماند. واریانس داده‌های اولیه چقدر است؟

۱) ۱۵/۹۷ ۲) ۱۵/۱۷ ۳) ۱۵/۶۷ ۴) ۱۵/۴۷

۹- داده‌های آماری ۷ عدد صحیح زوج متوالی هستند که میانگین آن‌ها دو برابر انحراف معیار است. اگر به هر داده دو واحد اضافه و مقادیر حاصل را ۳ برابر کنیم، ضریب تغییرات داده‌های حاصل چند درصد می‌شود؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

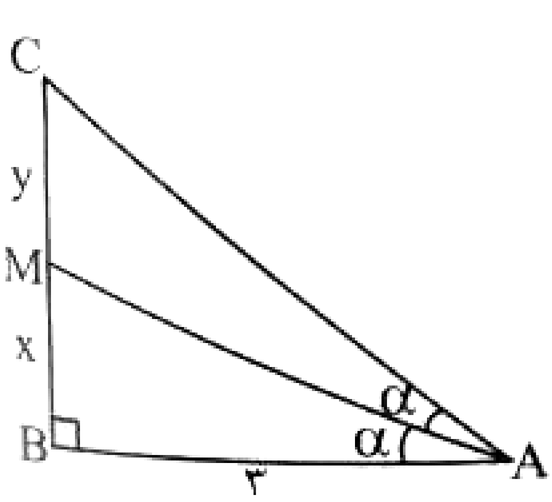
۱۰- سه عدد متوالی مضرب ۳ را در نظر بگیرید. عدد بزرگ‌تر را حذف می‌کنیم و به‌جای آن عدد بعدی مضرب ۳ را می‌نویسیم. عدد کوچک‌تر را حذف می‌کنیم و به‌جای آن عدد مضرب ۳ قبلی را می‌نویسیم. واریانس داده‌های جدید چند برابر واریانس داده‌های قبلی است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۱- اگر g وارون تابع $f(x) = \sqrt{x} + x$ باشد، آهنگ تغییر g در فاصله $[\frac{۳}{۴}, ۲]$ چند برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر g در $x = ۱$ است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵-\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۳}{\sqrt{۵}-۱}$

۱۲- با توجه به شکل زیر آهنگ تغییر y نسبت به x در $x = ۱$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۶}{۱۶}$ ۲) $\frac{۲۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲۸}{۱۶}$ ۴) $\frac{۲۹}{۱۶}$

۱۳- به ازای کدام مقادیر m تابع $f(x)=\frac{x^2+mx+2}{x-1}$ فاقد اکسترمم نسبی است، در کدام گزینه آمده است؟

۱) $m<-3$ ۲) $m\le 1$ ۳) $m\le -3$ ۴) $m<1$

۱۴- تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^3|x^2-4|}{x-1}$ چند نقطه اکسترمم دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۵- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x|x^2-2x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{32}{27}$ ۳) -3 ۴) $\frac{27}{23}$

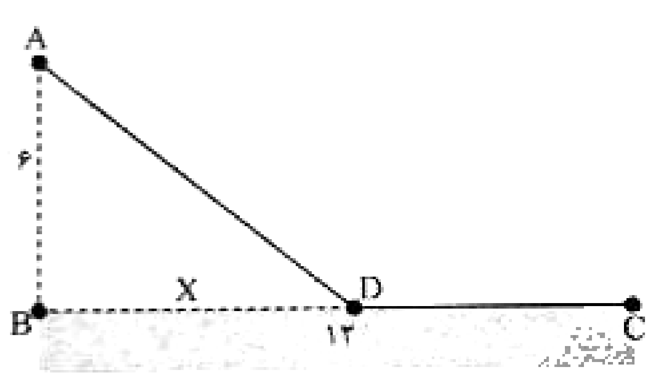
۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}5 & ; \; x\ge 2\\ x & ; \; |x|<2\\ -3 & ; \; x\le -2\end{cases}$ و $g(x)=\frac{|x|}{x}-\frac{x}{|x+1|}$ مقدار ماکزیمم مطلق fog کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -3

۱۷- درون سهمی $f(x)=2x-x^2$ مستطیل‌هایی چنان محاط کرده‌ایم که دو رأس آن روی نمودار سهمی و دو رأس دیگر آن روی محور طول‌ها قرار دارد. اگر $0\le x\le 2$ آنگاه بزرگ‌ترین مساحت مستطیل‌ها کدام است؟

۱) $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{1}{6\sqrt{3}}$

۱۸- یک مرغ دریایی در نقطه A قرار دارد. از A تا D پرواز کرده و در هر متر ۷۰ واحد انرژی مصرف می‌کند. سپس از D تا C در سطح آب شنا می‌کند و در هر متر ۵۰ واحد انرژی مصرف می‌شود. به‌ازای کدام مقدار x انرژی مصرف‌شده در کل مسیر از A به C مینیمم است؟



۱) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $5\sqrt{3}$ ۴) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۹- در ظرف A دو مهره سفید و سه مهره سیاه و در ظرف B سه مهره سفید و ۴ مهره سیاه داریم. دو مهره از A به B می‌اندازیم و سپس از ظرف B دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال دو مهره اخیر همرنگ هستند؟

۱) $\frac{81}{180}$ ۲) $\frac{82}{180}$ ۳) $\frac{83}{180}$ ۴) $\frac{84}{180}$

۲۰- شهری ۸ ساعت از شبانه‌روز را در تاریکی شب و ۱۶ ساعت دیگر را در روشنایی روز به سر می‌برد. اگر احتمال دزدیده شدن یک ماشین در روشنایی ۰/۰۰۰۱ و در تاریکی ۳ برابر این مقدار باشد، درصد احتمال دزدیده شدن ماشین در یک شبانه‌روز چقدر است؟

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{60}$ ۳) $\frac{1}{40}$ ۴) $\frac{1}{50}$

ریاضی

۱. **گزینه ۲ درست است.**

$$n(S) = \text{تعداد کل حالات} = ۵! = ۱۲۰$$

$$n(A) = \text{تعداد حالاتی که } A \text{ اول است} + \text{تعداد حالاتی که } A \text{ دوم است}$$

$$= ۴! + \binom{۴}{۱} \times ۳! = ۲۴ + ۲۴ = ۴۸$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴۸}{۱۲۰} \xrightarrow[\div ۲۴]{\div ۲۴} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

۲. **گزینه ۲ درست است.**

$$n(S) = \text{تعداد کل انتخاب‌های ۲ تا از ۱۲ مهره} = \binom{۱۲}{۲} = ۶۶$$

$$A = \text{تعداد حالات مجموع ۸} = \{\overset{WW}{۶۲}, \overset{WB}{۶۲}, \overset{BW}{۶۲}, \overset{BB}{۶۲}, \overset{WW}{۵۳}, \overset{WB}{۵۳}, \overset{BW}{۵۳}, \overset{BB}{۵۳}, \overset{WB}{۴۴}\}$$

$$\Rightarrow n(A) = ۹ \Rightarrow P(A) = \frac{۹}{۶۶} = \frac{۳}{۲۲}$$

۳. **گزینه ۲ درست است.**

احتمال اینکه مهرهٔ اول قرمز، مهرهٔ دوم سفید و مهرهٔ سوم قرمز باشند، برابراست با:

$$\frac{n}{n+۳} \times \frac{۳}{n+۲} \times \frac{n-۱}{n+۱} = \frac{۵}{۲۸}$$

با جایگذاری مقادیر گزینه‌ها متوجه می‌شویم به‌ازاء $n = ۵$ معادله برقرار است.

۴. **گزینه ۳ درست است.**

$$\left.\begin{array}{l} P(\text{حداقل یکی}) = P(A \cup B) = ۰/۶۵ \\ P(\text{حداکثر یکی}) = ۱ - P(A \cap B) = ۰/۸۵ \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۱۵ \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) + P(B) = ۰/۸$$

حالا چون A و B مستقل‌اند؛ داریم:

$$P(A) \times P(B) = ۰/۱۵$$

پس جمع و ضرب این احتمال‌ها ۰/۸ و ۰/۱۵ است و ریشه‌های معادله $x^۲ - ۰/۸x + ۰/۱۵ = ۰$ هستند.

$$x = \frac{۰/۸ \pm \sqrt{۰/۶۴ - ۰/۶}}{۲} = \frac{۰/۸ \pm ۰/۲}{۲} = \begin{cases} ۰/۵ \\ ۰/۳ \end{cases}$$

چون $P(B) < P(B')$ پس $P(B) = ۰/۳$ و داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A)P(B') = ۰/۵(۱ - ۰/۳) = ۰/۵(۰/۷) = ۰/۳۵$$

۵. **گزینه ۳ درست است.**

احتمال پیشامد دو عضوی $P(A) = \frac{۲}{۸}$ است.

احتمال رو در پرتاب اول $P(B) = \frac{۱}{۲}$ است.

چون مستقل‌اند، احتمال اشتراک آن‌ها باید $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۸}$ باشد.

پس $A \bigcap B$ تک عضوی است. یعنی پیشامد دو عضوی A با $B = \begin{Bmatrix} \text{پ پ ر} \\ \text{ر پ ر} \\ \text{ر ر پ} \\ \text{ر ر ر} \end{Bmatrix}$ یک عضو مشترک دارد، تعداد حالت‌های A برابر است با:

$$\binom{۴}{۱} \times \binom{۴}{۱} = ۱۶$$

۶. گزینه ۳ درست است.

تعداد حالت‌های مجموع ۳ تاس برابر است با:

مجموع	۳	۴	۵	۶	۷	۸
حالت	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱

پس روی هم ۵۶ حالت مورد قبول است. حالا برای ۳ عدد متفاوت فقط در مجموع‌های ۶ و ۷ و ۸ جستجو کنیم:

۵۱۲ ، ۴۳۱ ، ۴۲۱ ، ۲۱۳

۶ حالت ۶ حالت ۶ حالت ۶ حالت

پس: $P(\text{متفاوت} \mid \text{مجموع کمتر مساوی ۸}) = \frac{۲۴}{۵۶} = \frac{۳}{۷}$

۷. گزینه ۳ درست است.

$$P(A' \mid B) = \frac{P(A' \bigcap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{۱}{۳} \to ۱ - \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{۱}{۳} \to \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{۲}{۳} \to \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{۳}{۲}$$

۸. گزینه ۴ درست است.

میانگین برابر است با: $\bar{x} = \frac{۲۲ + ۱۲ + ۱۴}{۳} = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶$

طبق فرمول ضریب تغییر:

$$CV_۲ = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sigma_۲ = \frac{۱}{۴}\bar{x} = \frac{۱}{۴} \times ۱۶ = ۴$$

پس: $\sigma_۲^۲ = ۱۶$

واریانس اولیه $\sigma_۱^۲ = \frac{(x_۱ - ۱۶)^۲ + \cdots + (x_{۱۵} - ۱۶)^۲}{۱۵}$

واریانس جدید: $\sigma_۲^۲ = \frac{(x_۱ - ۱۶)^۲ + \cdots + (x_{۱۵} - ۱۶)^۲ + (۱۴ - ۱۶)^۲ + (۱۲ - ۱۶)^۲ + (۲۲ - ۱۶)^۲}{۱۵ + ۳} = ۱۶$

پس داریم: $\frac{۱۵\sigma_۱^۲ + ۱۶ + ۴ + ۳۶}{۱۸} = ۱۶ \Rightarrow ۱۵\sigma_۱^۲ = ۲۸۸ - ۵۶ = ۲۳۲ \Rightarrow \sigma_۱^۲ = \frac{۲۳۲}{۱۵} \simeq ۱۵/۴۷$

۹. گزینه ۴ درست است.

انحراف معیار ۷ عدد صحیح زوج متوالی‌برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^۲ - ۱}{۱۲}}\,|d| = \sqrt{\frac{۷^۲ - ۱}{۱۲}} \times ۲ = ۴ \to \bar{x} = ۲\sigma = ۸ \xrightarrow{y=۳(x+۲)} \begin{cases} \bar{y} = ۳(۸ + ۲) = ۳۰ \\ \sigma = ۳ \times ۴ = ۱۲ \end{cases}$$

پس: $CV = \frac{\sigma}{\bar{y}} = \frac{۱۲}{۳۰} = \%۴۰$

۱۰. گزینه ۳ درست است.

مقدار وسط را $\bar{x}$ در نظر می‌گیریم. سه دادهٔ اولیه به‌صورت $\bar{x}-3, \bar{x}, \bar{x}+3$ در می‌آید.

$$\sigma_1^2 = \frac{(-3)^2+0^2+3^2}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

سه دادهٔ نهایی به‌صورت $\bar{x}-6\ ,\ \bar{x}\ ,\ \bar{x}+6$ در می‌آید.

$$\sigma_2^2 = \frac{(-6)^2+0^2+(6)^2}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

نسبت واریانس داده‌های جدید را به واریانس داده‌های قدیمی می‌یابیم.

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{24}{6} = 4$$

۱۱. گزینه ۳ درست است.

ضابطه وارون $f(x) = x+\sqrt{x}$ یا $y = (\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ به‌صورت $g(x) = (\sqrt{x+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2})^2$ است که می‌شود:

$$y = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x+\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(2)-g(\frac{3}{4})}{2-\frac{3}{4}} = \frac{2/5 - \sqrt{\frac{9}{4}} - (\frac{5}{4}-\sqrt{1})}{\frac{5}{4}} = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{4}}} \Rightarrow g'(1) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{4}}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}$$

و نسبت موردنظر $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}}$ یا $\dfrac{3}{5-\sqrt{5}}$ است.

۱۲. گزینه ۴ درست است.

با توجه به شکل و اینکه $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \to \frac{y+x}{3} = \frac{2(\frac{x}{3})}{1-(\frac{x}{3})^2} \xrightarrow{\times 3}$$

$$y+x = \frac{2x}{1-\frac{x^2}{9}} \to y+x = \frac{18x}{9-x^2} \to y = \frac{18x}{9-x^2} - x$$

کافی است از y برحسب x مشتق بگیریم:

$$y' = \frac{۱۸(۹-x^۲)-(-۲x)۱۸x}{(۹-x^۲)^۲} - ۱ = \frac{۱۶۲-۱۸x^۲+۳۶x^۲}{(۹-x^۲)^۲} - ۱$$

$$y' = \frac{۱۸x^۲+۱۶۲}{(۹-x^۲)^۲} - ۱$$

به‌جای x مقدار یک جایگذاری می‌کنیم:

$$y' = \frac{۱۸+۱۶۲}{۸^۲} - ۱ = \frac{۱۸۰}{۶۴} - ۱ = \frac{۲۹}{۱۶}$$

۱۳. گزینه ۳ درست است.

از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \frac{(۲x+m)(x-۱)-(x^۲+mx+۲)}{(x-۱)^۲} = \frac{x^۲-۲x-m-۲}{(x-۱)^۲} = ۰$$

معادلهٔ بالا نباید ریشه داشته باشد یا باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

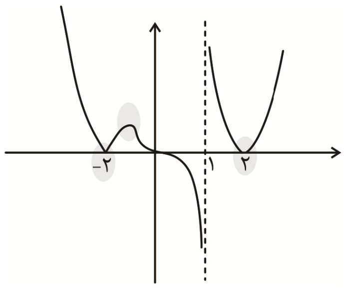
$$\Delta \le ۰ \to (-۲)^۲ - ۴(۱)(-m-۲) \le ۰ \xrightarrow{\div ۴} ۱-(-m-۲) \le ۰$$
$$\to ۱+m+۲ \le ۰ \to m \le -۳$$

۱۴. گزینه ۱ درست است.

به‌خاطر عامل $|x-۲|$ و $|x+۲|$ در ۲ و ۲- گوشه داریم.

به‌خاطر عامل $x^۳$ در $x=۰$ فرم لُر داریم.

به‌خاطر عامل $\frac{۱}{x-۱}$ در $x=۱$، حدّ بی‌نهایت داریم. با توجه به نمودار، تابع ۳ تا اکسترمم دارد.



۱۵. گزینه ۲ درست است.

ضابطهٔ تابع را به‌صورت قطعه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = x|x^۲-۲x| = \begin{cases} x(-x^۲+۲x) = -x^۳+۲x^۲ & ۰ \le x \le ۲ \\ x(x^۲-۲x) = x^۳-۲x^۲ & x<۰ \text{ یا } x>۲ \end{cases}$$

از تابع مشتق می‌گیریم و ریشه‌های آن و سایر نقاط بحرانی را می‌یابیم:

$$f'(x) = \begin{cases} -۳x^۲+۴x=۰ \to \begin{cases} x=۰ \checkmark \\ x=\frac{۴}{۳} \checkmark \end{cases} & ۰ \le x \le ۲ \\ ۳x^۲-۴x=۰ \to \begin{cases} x=۰ \times \\ x=\frac{۴}{۳} \times \end{cases} & x<۰ \text{ یا } x>۲ \end{cases}$$

مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\{-۱,۰,\frac{۴}{۳},۲\}$ است. عرض این نقاط را می‌یابیم:

$$f(-۱) = -۳$$
$$f(۰) = ۰$$

$$f(\frac{4}{3})=\frac{32}{27}$$
$$f(2)=0$$

ماکزیمم مطلق تابع $\frac{32}{27}$ است.

۱۶. گزینه ۱ درست است.

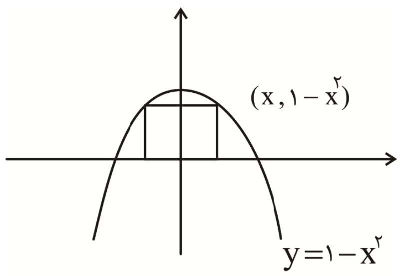
g را به‌صورت قطعه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x)=\begin{cases}-1-(-1)=0\,, & x<-1\\ -1-1=-2\,, & -1<x<0\\ 1-1=0\,, & x>0\end{cases}$$

پس g مقادیر ۰ و ۲- را دارد که با قرار دادن آن در f به ۰ و ۳- می‌رسیم که ماکزیمم مطلق صفر است.

۱۷. گزینه ۱ درست است.

بهتر است نمودار تابع را یک واحد به چپ انتقال دهیم تا نسبت به محور عرض‌ها متقارن شود.



$$f(x)=2x-x^2 \to y=2(x+1)-(x+1)^2$$
$$=2x+2-x^2-2x-1 \to y=1-x^2$$

نمودار تابع و مستطیل محاط در آن را رسم می‌کنیم.

تابع مساحت مستطیل‌ها را می‌سازیم و مشتق آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$S=2x(1-x^2)=2x-2x^3$$
$$\to S'=2-6x^2=0 \to x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ماکزیمم مساحت را محاسبه می‌کنیم:

$$S=2x(1-x^2)\xrightarrow{x=\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2}{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{3})=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

۱۸. گزینه ۱ درست است.

انرژی در کل مسیر برابر است با:

$$E=70\times AD+50\times DC$$
$$f(x)=70\sqrt{x^2+6^2}+50(12-x)$$

برای رسیدن به مقدار مینیمم، مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x)=70\frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}}-50=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{36+x^2}}=\frac{5}{7}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\frac{x^2}{x^2+36}=\frac{25}{49}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{x^2}{36}=\frac{25}{24}\to x^2=\frac{3}{2}\times 25 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}5=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

دقت کنید که:

	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$	
f'	$-$ 0 $+$	

پس در $x=\frac{5\sqrt{6}}{2}$ انرژی مینیمم است.

۱۹. گزینه ۳ درست است.

دو مهره انتقالی از A به B:

$$\longrightarrow \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \text{ دو سفید } \Rightarrow \begin{bmatrix}3+2\\4\end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\binom{5}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} \text{ دو همرنگ}$$

$$\longrightarrow \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \text{ دو سیاه } \Rightarrow \begin{bmatrix}3\\4+2\end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\binom{3}{2}+\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} \text{ دو همرنگ}$$

$$\longrightarrow \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} \text{ یک سفید و یک سیاه } \Rightarrow \begin{bmatrix}3+1\\4+1\end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\binom{4}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} \text{ دو همرنگ}$$

$$P=\frac{1}{10}\times\frac{16}{36}+\frac{3}{10}\times\frac{18}{36}+\frac{6}{10}\times\frac{16}{36}=\frac{16+54+96}{360}=\frac{166}{360}=\frac{83}{180}$$

۲۰. گزینه ۲ درست است.

این شهر $\frac{1}{3}$ زمان شبانه‌روز را در تاریکی و $\frac{2}{3}$ آن را در روشنایی روز سپری می‌کند. نمودار درختی احتمال کل را رسم می‌کنیم:

$\frac{1}{3}$ تاریکی شب $\times 0/0003=\frac{0/0003}{3}$

$\frac{2}{3}$ روشنایی روز $\times 0/0001=\frac{0/0002}{3}$

مجموع احتمال‌ها $\frac{0/0005}{3}$ یا $\frac{5}{30000}$ و درصد احتمال آن $\frac{5}{300}$ یعنی $\frac{1}{60}$ است.

۱۱۱- A و B دو مجموعهٔ نامتناهی باشند، چند مورد از گزاره‌های زیر همواره درست هستند؟

الف) $A-B$ نامتناهی است.

ب) $A \cap B$ متناهی است.

پ) $A \cup B$ نامتناهی است.

ت) A' متناهی است.

ث) $(A-B)'$ متناهی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲- چند دنبالهٔ حسابی با اعضای طبیعی و بیشترین تعداد عضو نابیشتر از ۳۱ که جملهٔ اول آن‌ها یک باشد، وجود دارد؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۱۱۳- رأس‌های هشت‌ضلعی منتظم روی دایره قرار دارند. مساحت هشت‌ضلعی چند برابر مساحت دایره است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{\pi}$ ۳) $\frac{۲}{\pi}$ ۴) $\frac{۳}{\pi}$

۱۱۴- حاصل $\sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۲}{\sqrt{۵}+۲}}+\sqrt{\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}-۲}}+۶}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}+۱$ ۲) $\sqrt{۵}-۱$ ۳) $\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}-\sqrt{۲}$

۱۱۵- اگر بزرگ‌ترین مجموعه جواب نامعادله $\frac{۱}{x^۲-x+۲}+\frac{۲}{x^۲+x+۲}\leq\frac{۱}{x}$ به‌صورت $(a,b]\cup[c,+\infty)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۶- مجموعه جواب نامعادلهٔ $|\frac{۳x-۱}{bx+۲}|<۱$ به‌صورت $(a,+\infty)$ است، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $-\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱۱}{۴}$

۱۱۷- اگر $f=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ |x|+|y|=۲\}$، آنگاه f با حذف حداقل چند تا از زوج‌های مرتب، تابع می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۸- برد تابع $f(x)=|x+\frac{۱}{۲}|$ با دامنهٔ A به‌صورت $\{۱,۲,۳\}$ است. چند حالت برای A وجود دارد؟

۱) ۲۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶

۱۱۹- به چند صورت می‌توان ۶ کتاب متمایز رشتهٔ تجربی و ۷ کتاب متمایز رشتهٔ ریاضی را در یک قفسه چید به‌طوری که کتاب اول و آخر از یک رشته باشند؟

۱) $۳\times ۱۲!$ ۲) $\frac{۱۳!}{۲}$ ۳) $۶\times ۱۲!$ ۴) $۶!\times ۷!$

۱۲۰- با حروف کلمهٔ SANJESH می‌توان a کلمه ساخت که دو حرف S کنار یکدیگر نیستند و می‌توان b کلمه ساخت که A زودتر از N آمده باشد. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۰}{۷}$

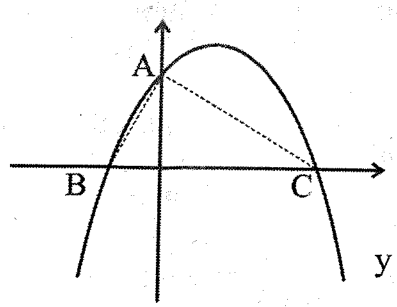
۱۲۱- در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی، ۵ مهرهٔ زرد و ۶ مهرهٔ قرمز وجود دارد. اگر ۳ مهره به تصادف از این کیسه برداریم، با کدام احتمال حداقل از یک رنگ بیش از یک مهره برداشته‌ایم؟

۱) $\frac{۳۲}{۲۷۳}$ ۲) $\frac{۶۷}{۹۱}$ ۳) $\frac{۱۱}{۹۱}$ ۴) $\frac{۶۷}{۵۴۶}$

۱۲۲- دو ضلع از مربعی بر روی خط‌های متعامد $۳x+۴y+۱=۰$ و $۴x-۳y-۷=۰$ قرار دارند. معادلهٔ قطر مربع کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۲x-۱۳y-۱۵=۰$ ۲) $x-۷y-۸=۰$ ۳) $۱۳x+۲y-۱۱=۰$ ۴) $۱۵x+۲y-۱۳=۰$

۱۲۳- به‌ازای کدام مقدار k، مثلث ABC به شکل زیر در رأس A قائمه است؟



$y = x^2 + 4x + k$

۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۲

۴) $\frac{5}{2}$

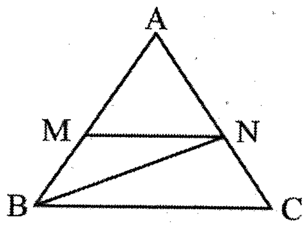
۱۲۴- معادلهٔ $\frac{k}{x-3} = \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+3x+3}{x^2-x-6}$ جواب حقیقی ندارد. مجموع مقادیر ممکن برای k کدام است؟

۱) $\frac{11}{5}$ ۲) $\frac{17}{5}$ ۳) $\frac{51}{5}$ ۴) $\frac{21}{5}$

۱۲۵- مجموعه جواب معادلهٔ $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} = 3$ شامل چند عضو صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۱۲۶- در شکل مقابل MN با BC موازی و از M خطی به موازات BN رسم کرده تا AC را در P قطع کند. اگر مساحت مثلث MNP، برابر $\frac{9}{49}$ مساحت مثلث BNC باشد، مساحت مثلث BMN چند برابر مساحت مثلث AMP است؟



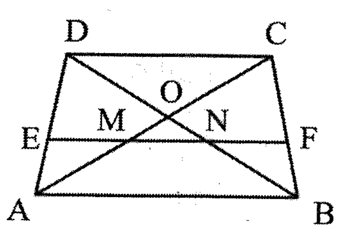
۱) $\frac{45}{4}$ ۲) $\frac{63}{8}$

۳) $\frac{27}{8}$ ۴) $\frac{28}{9}$

۱۲۷- در مثلث ABC نقطه D ضلع BC را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم می‌کند. اگر از رأس B خطی رسم کنیم که AD را در نقطه O و AC را در نقطهٔ E قطع کند و نقطهٔ O خط AD را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم کند، حاصل $\frac{OE}{BE}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{24}$

۱۲۸- در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل اندازهٔ قاعده ۶ و ۱۰ است. اگر $\frac{4}{3} = \frac{DE}{AE} = \frac{CF}{BF}$ باشد، آنگاه نسبت $\frac{S_{MON}}{S_{OCD}}$ کدام است؟



۱) $\frac{121}{441}$ ۲) $\frac{121}{784}$

۳) $\frac{9}{49}$ ۴) $\frac{9}{1963}$

۱۲۹- اگر $\frac{\cos 280^\circ - \sin 550^\circ}{\cos 370^\circ + 2\cos 440^\circ} = 0/26$ باشد، $[\cot 10^\circ]$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۰- در مورد زاویهٔ $\theta = 4$ کدام درست است؟

۱) $\sin\theta > \cos\theta$ ۲) $\tan\theta > \cot\theta$ ۳) $\sin 5 > \sin\theta$ ۴) $\cos\theta < \cos 3$

۱۳۱- اگر توابع $f(x)=\sqrt{ax^2+8x+c}+d$ و $g(x)=\{(2,1)\}$ مساوی باشند، مقدار $d-c-a$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۳۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & x<2\\ -|x-m|, & x\geq 2\end{cases}$ یک به یک است. حدود m کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $m\leq -1$ ۳) $1\leq m<2$ ۴) $\varnothing$

۱۳۳- وارون تابع $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ به‌صورت $g(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+c}$ است. $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۳۴- معادلهٔ $x^4+4x^2(\log x)^2=(\log x)^4$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۵- در تابع $f(x)=\log_2 x$ طول‌های $1,x_2,x_3,\dots$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $f(1),f(x_2),f(x_3),\dots$ تشکیل دنبالهٔ حسابی غیرثابت بدهند. شیب خط گذرنده از نقطه‌های به طول x_3 و x_4 بر روی منحنی نصف شیب خط گذرنده از نقاط x_2 و x_3 بر روی منحنی باشد. قدرنسبت دنبالهٔ حسابی کدام است؟

۱) $\log_2^3$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\log_2^5$

۱۳۶- حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}}-2^{1-x}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) صفر

۱۳۷- به‌ازای چند مقدار طبیعی برای a، تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax^2-4x+a}}{a\cos x+5}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) بی‌شمار ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۸- یک خانواده با دو پسر و یک دختر دور یک میز نشسته‌اند. با کدام احتمال، دو پسر کنار یکدیگر نیستند؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۳۹- اگر $0/1=\dfrac{P(A\cup B)}{4}=\dfrac{P(B-A)}{2}=P(A-B)$ باشد، آنگاه $P(A|B)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۴۰- میانگین و ضریب تغییرات قطر تعدادی دایره به‌ترتیب ۳۰ و ۰/۳ است. میانگین مساحت‌های این دایره‌ها چند برابر $\frac{\pi}{2}$ است؟

۱) 450π ۲) ۹۸۹ ۳) 989π ۴) $\frac{981}{2}$

ریاضی

۱۱۱. گزینه ۱ درست است.

A و B هر دو نامتناهی هستند، پس اجتماع آن‌ها نامتناهی است، ولی اشتراک، تفاضل و متمم آن‌ها ممکن است متناهی باشند یا نامتناهی؛ بنابراین فقط مورد پ درست است.

۱۱۲. گزینه ۳ درست است.

با توجه به یک بودن جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی و طبیعی و نابیشتر بودن جمله‌ها از ۳۱ داریم:

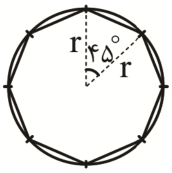
$$a_n = a_1 + (n-1)d \le 31 \rightarrow (n-1)d \le 30$$

حداقل n برابر ۳ است (چون برای تشکیل دنبالهٔ حسابی حداقل به سه جمله نیاز داریم) و حداقل قدرنسبت ۱ است چون قدرنسبت عدد طبیعی است و نمی‌تواند کمتر از یک باشد.

$$n = 3 \rightarrow (3-1)d \le 30 \rightarrow d \le 15$$

با توجه به طبیعی بودن d تعداد ۱۵ دنبالهٔ با اعضای طبیعی نابیشتر از ۳۱ می‌توان ساخت که جملهٔ اول آن‌ها یک باشد.

۱۱۳. گزینه ۱ درست است.



$$\text{مساحت ۸ ضلعی} = ۸\times \text{مساحت مثلث} = ۸\times\frac{۱}{۲}r^۲\sin ۴۵^\circ = ۲\sqrt{۲}r^۲$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^۲$$

$$\text{نسبت} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$$

۱۱۴. گزینه ۱ درست است.

چون $(\sqrt{۵}-۲)\times(\sqrt{۵}+۲)=۱$ پس دو عبارت $\sqrt{۵}+۲$ و $\sqrt{۵}-۲$ معکوس هم هستند.

$$\sqrt{\sqrt{(\sqrt{۵}-۲)^۲}+\sqrt{(\sqrt{۵}+۲)^۲}+۶}=\sqrt{|\sqrt{۵}-۲|+|\sqrt{۵}+۲|+۶}=\sqrt{\sqrt{۵}-۲+\sqrt{۵}+۲+۶}$$

$$=\sqrt{۲\sqrt{۵}+۶}=\sqrt{(\sqrt{۵}+۱)^۲}=(\sqrt{۵}+۱)=\sqrt{۵}+۱$$

۱۱۵. گزینه ۳ درست است.

چون $x^۲+x+۲$ و $x^۲-x+۲$ همواره مثبت هستند، پس سمت چپ نامعادله مثبت است و سمت راست معادله هم باید مثبت باشد تا نامعادله برقرار باشد. پس $x>۰$ است، طرفین نامعادله را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x-۱+\frac{۲}{x}}+\frac{۲}{x+۱+\frac{۲}{x}}\leq ۱ \to x+\frac{۲}{x}=t$$

$$\frac{۱}{t-۱}+\frac{۲}{t+۱}\leq ۱\to\frac{t+۱+۲t-۲}{(t-۱)(t+۱)}\leq ۱$$

$$\frac{۳t-۱}{(t-۱)(t+۱)}-\frac{۱}{۱}\leq ۰\to\frac{۳t-۱-t^۲+۱}{(t-۱)(t+۱)}\leq ۰$$

$$\frac{-t^۲+۳t}{(t-۱)(t+۱)}\leq ۰$$

چون $x^۲-x+۲>۰$ پس: $x^۲+۲>x$ و چون $x>۰$ است، پس $x+\frac{۲}{x}>۱$ است و $t>۱$ و $t-۱>۰$ و $t+۱>۰$ هستند، پس باید $-t^۲+۳t\leq ۰$

$$t(t-۳)\geq ۰\xrightarrow{t>۱}t-۳\geq ۰\to t\geq ۳$$

$$x+\frac{۲}{x}\geq ۳\to x^۲-۳x+۲\geq ۰$$

x		۱		۲	
P	+		-		+

$$(-\infty,۱]\cup[۲,+\infty)\xrightarrow{x>۰}(۰,۱]\cup[۲,+\infty)$$

پس $a+b+c=۰+۱+۲=۳$

۱۱۶. گزینه ۱ درست است.

می‌دانیم: $$|\frac{u}{v}|=\frac{|u|}{|v|}$$

پس داریم: $$\frac{|۳x-۱|}{|bx+۲|}<۱$$

$$|۳x-۱|<|bx+۲|\to ۹x^۲-۶x+۱<b^۲x^۲+۴+۴bx$$

$$(۹-b^۲)x^۲-۶x-۴bx-۳<۰\to(۹-b^۲)x^۲+x(-۶-۴b)-۳<۰$$

چون جواب نامعادله به‌صورت $(a,+\infty)$ است، پس ضریب x^2 صفر است.

$$b=3 \to -18x-3<0 \to -18x<3$$

$$x>\frac{-3}{18} \to x>\frac{-1}{6}$$

$$b+a=3+(-\frac{1}{6})=\frac{17}{6}$$

$$b=-3 \to 6x-3<0 \to x<\frac{1}{2}$$

چون مجموعه جواب به‌صورت $(a,+\infty)$ است، پس $x<\frac{1}{2}$ قابل قبول نیست و مقدار $a+b=\frac{17}{6}$ هست.

۱۱۷. گزینه ۳ درست است.

اعضای f عبارت‌اند از:

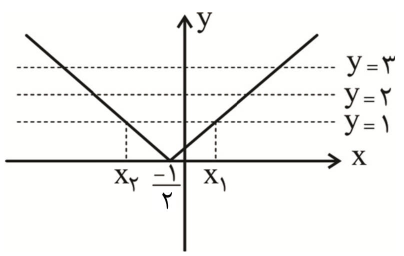
$$|x|+|y|=2$$

$$(x,y)=(2,0),(-2,0),(0,2),(0,-2),(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$$

با مؤلفهٔ اول ۲ و ۲- فقط یک زوج مرتب داریم.

با مؤلفهٔ اول ۰ و ۱ و ۱- هر کدام ۲ زوج مرتب داریم که باید یکی حذف شود. پس حذف حداقل ۳ عضو لازم است.

۱۱۸. گزینه ۱ درست است.



تابع هر یک از مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را دو بار می‌گیرد. پس مثلاً برای وجود ۱ در برد وجود x_1 یا x_2 یا هر دو در دامنه لازم است.

x_1 یا x_2 یا هر دو $\Rightarrow$ ۳ حالت

پس $3\times3\times3$ حالت برای دامنه داریم. یعنی A دارای ۲۷ حالت است.

۱۱۹. گزینه ۳ درست است.

حالت اول: کتاب اول و آخر از رشته تجربی باشد:

$$\underbrace{6}_{\text{اول}} \times \underbrace{11!}_{\text{کتاب‌های وسط}} \times \underbrace{5}_{\text{آخر}} = 30\times11!$$

میان ۱۱ کتاب باقی‌مانده تفاوتی نیست و جایگشت ساده است.

حالت دوم: کتاب اول و آخر از رشته ریاضی باشد:

$$\underbrace{7}_{\text{اول}} \times \underbrace{11!}_{\text{کتاب‌های وسط}} \times \underbrace{6}_{\text{آخر}} = 42\times11!$$

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$(30\times11!)+(42\times11!)=72\times11!=6\times12!$$

۱۲۰. گزینه ۴ درست است.

برای پیدا کردن حالاتی که دو حرف S کنار یکدیگر نیستند، دو حرف S را یک بسته در نظر می‌گیریم و حالاتی که کنار هم هستند را از کل حالات کم می‌کنیم:

$$\frac{7!}{2!}-6!=6!(\frac{7}{2}-1)=\frac{5}{2}\times6!$$

همچنین برای دو حرف A و N دو حالت وجود دارد، یا A زودتر آمده است، یا N زودتر آمده است؛ از آنجایی که شرط خاصی در صورت سؤال ذکر نشده و این دو حرف با هم تفاوتی ندارند، در نصف کلمات ساخته‌شده A زودتر آمده و در نصف دیگر N زودتر آمده است، پس $b=\frac{7!}{2!}\times\frac{1}{2}$

خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۵}{۲}\times ۶!}{\frac{۷!}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۵}{۱}}{\frac{۷}{۲}}=\frac{۱۰}{۷}$$

۱۲۱. گزینه ۲ درست است.

ابتدا تعداد کل حالات را حساب می‌کنیم:

$$\binom{۱۵}{۳}=\frac{۱۵\times ۱۴\times ۱۳}{۳!}=۵\times ۷\times ۱۳=۴۵۵$$

برای پیدا کردن تعداد حالات مطلوب کافی است حالت انتخاب ۱ مهره از هر رنگ را از کل حالات کم کنیم:

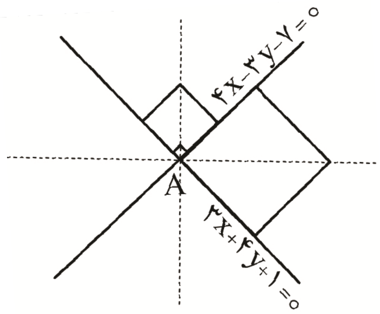
$$۴۵۵-\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۶}{۱}=۴۵۵-۱۲۰=۳۳۵$$

بنابراین احتمال برابر است با:

$$\frac{۳۳۵}{۴۵۵}=\frac{۶۷}{۹۱}$$

۱۲۲. گزینه ۲ درست است.

با توجه به شکل فرضی، قطرهای مربع‌ها، نیم‌سازهای دو خط هستند.



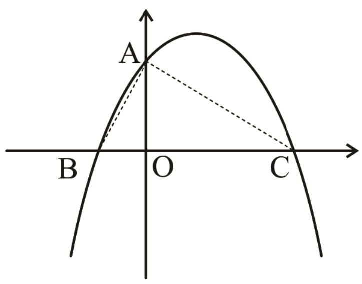
معادلهٔ نیم‌سازهای دو خط را می‌یابیم:

$$\frac{|۴x-۳y-۷|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|۳x+۴y+۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}\to |۴x-۳y-۷|=|۳x+۴y+۱|$$

$$\to\begin{cases}۴x-۳y-۷=۳x+۴y+۱\to x-۷y-۸=۰\\ ۴x-۳y-۷=-(۳x+۴y+۱)\to ۷x+y-۶=۰\end{cases}$$

۱۲۳. گزینه ۱ درست است.

عرض از مبدأ تابع برابر k و ریشه‌های آن را به‌ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ فرض می‌کنیم.



طبق روابط طولی موجود در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$OA^۲=OB\cdot OC\to k^۲=|x_۱|\cdot x_۲\xrightarrow{x_۱<۰}k^۲=-x_۱x_۲$$

$$\to k^۲=-\frac{c}{a}\to k^۲=-\frac{k}{(-۱)}\to k^۲=k\to\begin{cases}k=۰\\ k=۱\end{cases}$$

۱۲۴. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{x^۲+۳x+۳}{(x+۲)(x-۳)}-\frac{x}{x+۲}=\frac{k}{x-۳}$$

$$\frac{\cancel{x^۲}+۳x+۳-\cancel{x^۲}+۳x}{(x+۲)\cancel{(x-۳)}}=\frac{k}{\cancel{(x-۳)}}$$

$$\frac{۶x+۳}{x+۲}=k\to ۶x+۳=kx+۲k\to ۳-۲k=kx-۶x\to x(k-۶)=۳-۲k\to$$

$$x=\frac{۳-۲k}{k-۶}=\text{ریشه مخرج}$$

برای اینکه معادله جواب نداشته باشد، پس باید $x=\frac{۳-۲k}{k-۶}$ مساوی ریشه‌های مخرج باشد یا اصلاً موجود نباشد، پس $k=۶$ یا :

$$\begin{cases}\frac{۳-۲k}{k-۶}=\frac{-۲}{۱}\to ۳-۲k=-۲k+۱۲\to \text{k به‌دست نیامد}\\ \frac{۳-۲k}{k-۶}=\frac{۳}{۱}\to ۳-۲k=۳k-۱۸\to ۲۱=۵k\to k=\frac{۲۱}{۵}\end{cases}$$

جمع مقادیر k برابر است با : $\frac{۲۱}{۵}+۶=\frac{۵۱}{۵}$

۱۲۵. گزینه ۱ درست است.

ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{(\sqrt{x+۲}+۲)^۲}+\sqrt{(\sqrt{x+۲}-۱)^۲}=۳$$

$$|\underbrace{\sqrt{x+۲}+۲}_{\oplus}|+|\sqrt{x+۲}-۱|=۳$$

$$|\sqrt{x+۲}-۱|=۱-\sqrt{x+۲}$$

$$|u|=-u\to u\le ۰$$

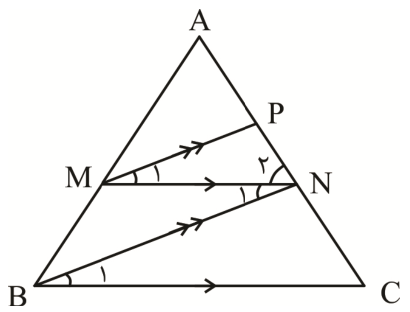
پس:

$$\sqrt{x+۲}-۱\le ۰$$

$$\sqrt{x+۲}\le ۱\to ۰\le x+۲\le ۱\to -۲\le x\le -۱$$

پس $x\in[-۲,-۱]$ و درنتیجه معادله دو جواب صحیح دارد.

۱۲۶. گزینه ۴ درست است.



با توجه به‌صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases}MP\parallel BN \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{M}_۱=\widehat{N}_۱\\ MN\parallel BC\xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}}\widehat{N}_۱=\widehat{B}_۱\ ,\ \widehat{N}_۲=\widehat{C}\end{cases}\Rightarrow \widehat{M}_۱=\widehat{N}_۱=\widehat{B}_۱\ ,\ \widehat{N}_۲=\widehat{C}$$

بنابراین دو مثلث MPN و BNC متشابه هستند و با توجه به نسبت داده‌شده داریم:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{BNC}}=\frac{۹}{۴۹}\Rightarrow\begin{cases}S_{MNP}=۹s\\ S_{BNC}=۴۹s\end{cases}$$

$$\frac{S_{MNP}}{S_{BNC}}=(\frac{MN}{BC})^۲=\frac{۹}{۴۹}\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{۳}{۷}$$

حال در ذوزنقه MNCB داریم:

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BNC}}=\frac{MN}{BC}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow S_{BMN}=\frac{۳}{۷}\times ۴۹s=۲۱s$$

طبق قضیه تالس $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}$ و همچنین داریم:

$$\overset{\Delta}{AMP}\sim\overset{\Delta}{ABN}\Rightarrow\frac{S_{AMP}}{S_{ABN}}=(\frac{AM}{AB})^{۲}=(\frac{MN}{BC})^{۲}=\frac{۹}{۴۹}$$

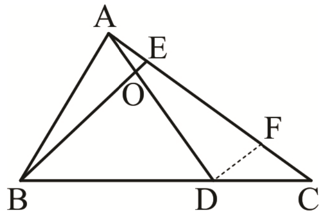
$$\Rightarrow\frac{S_{AMP}}{S_{AMP}+۳۰s}=\frac{۹}{۴۹}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{AMP}}{۳۰s}=\frac{۹}{۴۰}\Rightarrow S_{AMP}=\frac{۲۷}{۴}s$$

درنهایت داریم:

$$\frac{S_{BMN}}{S_{AMP}}=\frac{۲۱s}{\frac{۲۷}{۴}s}=\frac{۲۸}{۹}$$

۱۲۷. گزینه ۳ درست است.

با توجه به اطلاعات داده‌شده داریم:



$$\frac{OA}{OD}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{OA}{AD}=\frac{۱}{۵}$$

از D خطی موازی BE رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند.

طبق قضیه تالس در مثلث ADF داریم:

$$\frac{OA}{AD}=\frac{OE}{DF}=\frac{۱}{۵}\ (I)$$

حال در مثلث BCE طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{DF}{BE}=\frac{DC}{BC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{BE}{DF}=۴\ (II)$$

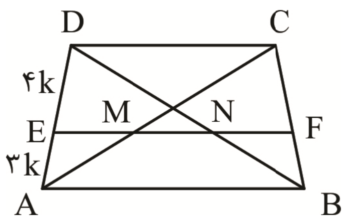
با توجه به (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases}\frac{OE}{DF}=\frac{۱}{۵}\\ \frac{BE}{DF}=۴\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم دو رابطه}}\frac{OE}{BE}=\frac{۱}{۲۰}$$

۱۲۸. گزینه ۱ درست است.

با توجه به نسبت‌های داده‌شده، طبق عکس قضیه تالس، می‌توان نتیجه گرفت $AB \parallel EF \parallel DC$.

حال داریم:



$$\overset{\Delta}{ACD}:ME\parallel CD\Rightarrow\frac{ME}{CD}=\frac{AE}{AD}\Rightarrow\frac{ME}{۶}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow ME=\frac{۱۸}{۷}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}:NE\parallel AB\Rightarrow\frac{NE}{AB}=\frac{DE}{AD}\Rightarrow\frac{NE}{۱۰}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow NE=\frac{۴۰}{۷}$$

$$\Rightarrow MN=NE-ME=\frac{۴۰}{۷}-\frac{۱۸}{۷}=\frac{۲۲}{۷}$$

حال با توجه به موازی بودن CD و MN و خط مورب MC می‌توان گفت:

$$\overset{\Delta}{OCD}\sim\overset{\Delta}{OMN}\Rightarrow\frac{S_{MON}}{S_{OCD}}=(\frac{MN}{CD})^{۲}=(\frac{\frac{۲۲}{۷}}{۶})^{۲}=\frac{۱۲۱}{۴۴۱}$$

۱۲۹. گزینه ۲ درست است.

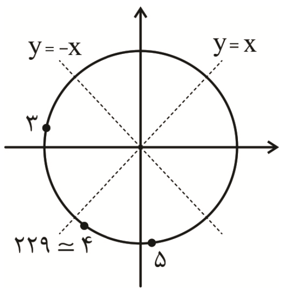
$$\frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۰^\circ)-\sin(۳\times۱۸۰^\circ+۱۰^\circ)}{\cos(۳۶۰^\circ+۱۰^\circ)+۲\cos(۳۶۰^\circ+۹۰^\circ-۱۰^\circ)}$$

$$=\frac{\sin۱۰^\circ+\sin۱۰^\circ}{\cos۱۰^\circ+۲\sin۱۰^\circ}\xrightarrow[\div\cos۱۰^\circ]{\div\cos۱۰^\circ}\frac{۲\tan۱۰^\circ}{۱+۲\tan۱۰^\circ}=۰/۲۶=\frac{۱۳}{۵۰}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰\tan۱۰^\circ=۱۳+۲۶\tan۱۰^\circ \Rightarrow ۷۴\tan۱۰^\circ=۱۳ \Rightarrow \tan۱۰^\circ=\frac{۱۳}{۷۴} \Rightarrow \cot۱۰^\circ=\frac{۷۴}{۱۳}$$

$\Rightarrow$ براکت $=۵$

۱۳۰. گزینه ۲ درست است.



با توجه به ربع سوم و قرارگیری نیم‌سازها داریم:

$$\tan۴>۱>\cot۴>۰>\cos۴>\sin۴$$

۵ از ۴ پایین‌تر است پس $\sin$ آن کمتر است.

۳ در سمت چپ ۴ قرار دارد، پس کسینوس آن کمتر است.

۱۳۱. گزینه ۲ درست است.

باید دامنه تابع $f(x)=\sqrt{ax^۲+۸x+c}+d$ به‌صورت $\{۲\}$ باشد، پس حتماً زیر رادیکال $(x-۲)^۲$ با ضریب منفی داریم:

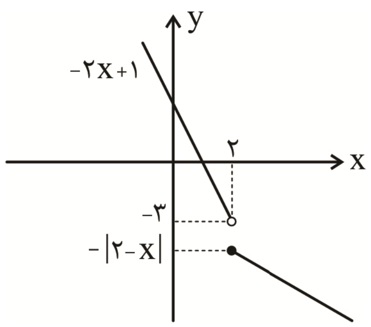
$$ax^۲+۸x+c=k(x^۲-۴x+۴)\Rightarrow k=-۲\Rightarrow a=-۲,c=-۸$$

پس $f(x)=\sqrt{-۲(x-۲)^۲}+d$ و باید $f(۲)=g(۲)=۱$ باشد، پس $d=۱$ و داریم: $d=۱$

و بنابراین:

$$d-c-a=۱۱$$

۱۳۲. گزینه ۲ درست است.



باید ضابطه‌ها در دامنه خود ۱ به ۱ باشند، یعنی نقطهٔ ماکزیمم قدرمطلق در $x\geq۲$ قرار ندارد:

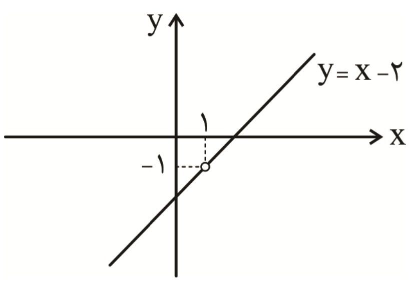
$$\rightarrow m<۲$$

و اشتراک بردها تهی باشد، یعنی عرض ماکزیمم ضابطه پایین (در $x=۲$) از شروع ضابطه بالا (در نقطهٔ توخالی $(۲,-۳)$) بیشتر نباشد:

$$f(۲)=-|۲-m|\leq-۳\rightarrow۲-m\geq۳\rightarrow m\leq-۱$$

۱۳۳. گزینه ۴ درست است.

ضابطه را ساده کنیم:



$$y=\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=x-۲\ ,\ x\neq۱$$

پس برد تابع به‌صورت $\mathbb{R}-\{-۱\}$ است.

ضابطه وارون $y=x-۲$ به‌صورت $y=x+۲$ است و دامنهٔ آن $x\neq-۱$ خواهد بود. پس می‌نویسیم:

$$f^{-۱}(x)=\frac{(x+۲)(x+۱)}{(x+۱)}=\frac{x^۲+۳x+۲}{x+۱}$$

و در مقایسه با صورت سؤال داریم:

$$a+b+c=۶$$

۱۳۴. گزینه ۲ درست است.

طرفین را بر $x^2(\log x)^2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{x^4}{x^2(\log x)^2}+4=\frac{(\log x)^4}{x^2(\log x)^2}\Rightarrow\frac{x^2}{(\log x)^2}+4=\frac{(\log x)^2}{x^2}\Rightarrow\left(\frac{x}{\log x}\right)^2+4=\left(\frac{\log x}{x}\right)^2$$

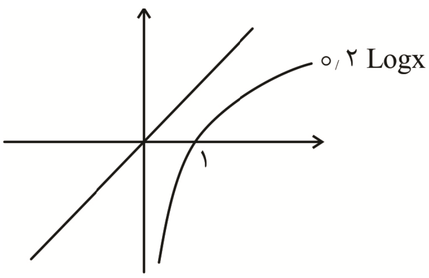
$\left(\frac{x}{\log x}\right)^2$ را t فرض می‌کنیم.

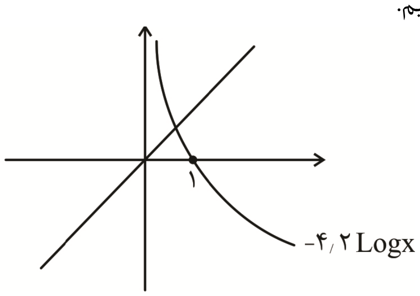
$$t+4=\frac{1}{t}\xrightarrow{\times t}t^2+4t=1\xrightarrow{+4}t^2+4t+4=5$$

$$\to(t+2)^2=5\to t=\pm\sqrt{5}-2$$

$$\to\begin{cases}\dfrac{x}{\log x}=\sqrt{5}-2\\[2mm]\dfrac{x}{\log x}=-\sqrt{5}-2\end{cases}\to\begin{cases}x=(\sqrt{5}-2)\log x\\x=(-\sqrt{5}-2)\log x\end{cases}\to\begin{cases}x=0.2\log x\\x=-4.2\log x\end{cases}$$

نمودارهای توابع بالا را رسم می‌کنیم.





معادله فقط یک ریشهٔ قابل قبول دارد.

۱۳۵. گزینه ۲ درست است.

اگر دنبالهٔ $f(1),f(x_2),f(x_3),\dots$ دنبالهٔ حسابی باشد، آنگاه:

$$2f(x_2)=f(1)+f(x_3)\to 2\log_2 x_2=\log_2 1+\log_2 x_3\to\log_2 x_2^2=\log_2 x_3\to x_2^2=x_3$$

دنبالهٔ $\{1,x_2,x_3,\dots\}$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q است. نسبت شیب‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}}{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}}=\frac{x_3-x_2}{x_4-x_3}=\frac{q^2-q}{q^3-q^2}=\frac{q^2-q}{q(q^2-q)}=\frac{1}{q}=\frac{1}{2}\to q=2$$

قدرنسبت دنبالهٔ حسابی $d=\log_2 x_2-\log_2 1=\log_2 q-\log_2 1=\log_2 2-0=1$

۱۳۶. گزینه ۳ درست است.

با جایگذاری $x=2$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، برای رفع ابهام از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$2^x=t\Rightarrow\lim_{\substack{x\to2\\t\to4}}\frac{t+\frac{8}{t}-6}{\sqrt{\frac{1}{t}-\frac{2}{t}}}=\lim\frac{t^2-6t+8}{\sqrt{t}-2}$$

$$\lim\frac{(t-4)(t-2)}{(\sqrt{t}-2)}=\lim\frac{(\sqrt{t}-2)(\sqrt{t}+2)(t-2)}{(\sqrt{t}-2)}=(2+2)\times(4-2)=8$$

۱۳۷. گزینه ۳ درست است.

به ۲ شرط زیر باید توجه کنیم:

۱) باید زیر رادیکال همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

۲) مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد.

شرط اول:

$$ax^۲ - ۴x + a \geq ۰ \to \begin{cases} \Delta \leq ۰ \\ a > ۰ \end{cases} \to ۱۶ - ۴a^۲ \leq ۰ \to ۴a^۲ \geq ۱۶ \to a \geq ۲ \text{ یا } a \leq -۲ \,, a > ۰$$

اشتراک $\leftarrow a \geq ۲$

شرط دوم:

$$a\cos x + ۵ \neq ۰ \to \cos x \neq -\frac{۵}{a}$$

$$-۱ \leq \cos x \leq ۱ \to -\frac{۵}{a} < -۱ \text{ یا } -\frac{۵}{a} > ۱$$

$$\left|\frac{-۵}{a}\right| > ۱ \to \frac{۵}{|a|} > ۱ \to |a| < ۵ \to -۵ < a < ۵$$

با اشتراک شرط اول و دوم حدود a به‌صورت زیر است $۲ \leq a < ۵$ پس مقادیر طبیعی a عبارت‌اند از ۲ و ۳ و ۴ پس جواب ۳ مقدار طبیعی برای a است.

۱۳۸. گزینه ۲ درست است.

راه‌حل اول:

اگر پسر اول روی یک صندلی بنشیند، پسر دوم می‌تواند روی ۲ صندلی از چهار صندلی باقی‌مانده بنشیند؛ بنابراین احتمال برابر است با $\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$.

راه‌حل دوم:

n نفر می‌توانند به $(n-۱)!$ حالت دور یک میز بنشینند، بنابراین تعداد حالات کل برابر $(۵-۱)! = ۴!$ است. برای پیدا کردن تعداد حالات مطلوب، دو پسر را یک نفر (یک بسته) در نظر می‌گیریم و تعداد را حساب می‌کنیم (جایگشت دو پسر را نیز باید حساب کنیم):

$$(۴-۱)! \times ۲! = ۳! \times ۲!$$

بنابراین احتمال خواسته‌شده در سوال برابر است با:

$$۱ - \frac{۳! \times ۲!}{۴!} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳۹. گزینه ۲ درست است.

با توجه به داده‌های صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = ۰/۱ \\ P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = ۰/۲ \end{cases} \Rightarrow P(A) + P(B) = ۰/۳ + ۲P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۴ \Rightarrow P(A) + P(B) = ۰/۴ + P(A \cap B)$$

بنابراین داریم:

$$۰/۴ + P(A \cap B) = ۰/۳ + ۲P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۱$$

حال خواسته سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{P(B) - P(A \cap B) = ۰/۲ ,\, P(A \cap B) = ۰/۱} P(A|B) = \frac{۰/۱}{۰/۳} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴۰. گزینه ۴ درست است.

با توجه به اطلاعات داده‌شده واریانس قطرها را به‌دست می‌آوریم:

$$cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow ۰/۳ = \frac{\sigma}{۳۰} \Rightarrow \sigma = ۹ \Rightarrow \sigma^{۲} = ۸۱$$

با استفاده از فرمول دوم واریانس داریم:

$$۸۱ = (\text{میانگین مجذور قطرها}) - (\text{مجذور میانگین قطرها})$$

$$\Rightarrow ۸۱ = \left(\frac{(۲r_۱)^۲ + (۲r_۲)^۲ + (۲r_۳)^۲ + \cdots + (۲r_n)^۲}{n}\right) - ۹۰۰ \Rightarrow \frac{۴r_۱^۲ + ۴r_۲^۲ + \cdots + ۴r_n^۲}{n} = ۹۸۱$$

با ضرب کردن $\frac{\pi}{۴}$ در دو طرف معادله به‌دست آمده، می‌توانیم میانگین مساحت‌های این دایره‌ها را به‌دست آوریم:

$$\frac{\pi r_۱^۲ + \pi r_۲^۲ + \pi r_۳^۲ + \cdots + \pi r_n^۲}{n} = \frac{۹۸۱\pi}{۴}$$

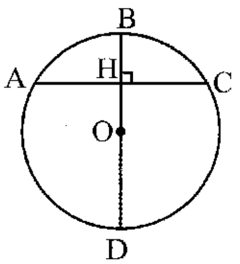
بنابراین $\frac{۹۸۱}{۲} = \frac{\frac{۹۸۱\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲}}$ و گزینهٔ ۴ صحیح است.

ریاضی

۱۱۱- جملات سوم و هشتم یک دنبالهٔ خطی به‌ترتیب ۳ و ۱۸ می‌باشد. همچنین جملات سوم، چهارم و پنجم یک دنبالهٔ درجه دوم به ترتیب ۵-، ۳- و ۱ می‌باشد. دو جمله هم شماره از این دنباله‌ها با هم برابر است، مجموع شماره‌های این دو جمله کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۱۲- در دایرهٔ مقابل O مرکز دایره بوده و اندازهٔ وتر AC، $\sqrt{۳}$ برابر شعاع دایره است. مساحت مثلث ABH چند برابر مساحت مثلث OCD است؟



۱) $\sqrt{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

۱۱۳- حاصل $\frac{۳\sqrt{۳}-\sqrt{۸}}{۵+\sqrt{۶}} \times \sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۵-۲\sqrt{۶}$ ۳) $۵+۲\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

۱۱۴- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+|x-۱| & x\geq ۱ \\ bx+b & ۰\leq x<۱ \\ cx+d & x<۰ \end{cases}$ یک تابع خطی باشد، چند مورد از موارد زیر درست است؟

الف) $bd=c^{۲}$ ب) $c^{۲}-۲b^{۳}+d^{۲}=a^{۲}$ ج) $(d)^{abc}=d^{۲}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۵- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{ax^{۳}+bx^{۲}+cx+۴}$ بازهٔ $[-۱,۲]$ باشد و تابع خطی $g(x)=dx^{۲}+(c-b)x+e+۲$ از ناحیهٔ دوم مختصات عبور نکند، حاصل بیشترین مقدار $a+b+c+d+e$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) -۳

۱۱۶- حروف کلمهٔ PANAMAS را کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت هیچ دو حرف A مجاور نیستند؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۹۶ ۴) ۲۴۰

۱۱۷- رمز یک کیف سامسونت ۳ رقمی است. اگر اعداد هر جایگاه فقط اعداد اول باشند، احتمال آنکه رمز کیف بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲۱}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۹}{۶۴}$

۱۱۸- با شرط $m>۰$ اگر نقطهٔ $A(-۲,۱)$ روی تابع $y=mx^{۲}+۲mx+m^{۲}$ باشد و نمودار تابع از خط $y=k$ پاره‌خطی به طول یک جدا کند، مقدار تابع به‌ازای k کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

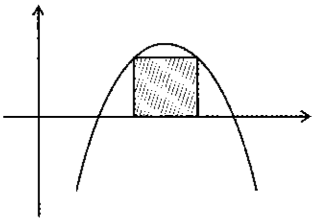
۱۱۹- اگر $\sqrt{۲-a-c}+\sqrt{۲b-d}=۰$، به‌طوری که a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آنگاه اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۱}{x^{۲}-b}+\frac{۱}{x-d}=\frac{۲}{x+d-b}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) ۲۱ ۴) $\sqrt{۲۱}$

۱۲۰- اگر $A(۰,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ و $C(-۱,a)$ سه رأس یک مثلث باشند و $M(۰,۱)$ روی امتداد نیمساز زاویهٔ A واقع باشد، تعداد مقادیر a کدام است؟

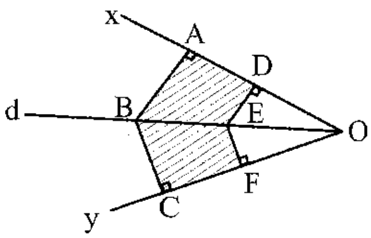
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۲۱- در شکل مقابل سهمی به معادلهٔ $y=-x^{۲}+۲x-\frac{۳}{۴}$ داریم. درون آن مربعی قرار می‌دهیم که ۲ رأس مربع روی محور xها و دو رأس دیگر روی سهمی باشند، قطر مربع کدام است؟



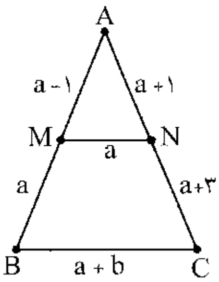
۱) $\sqrt{۷}-\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۷}-۲\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۱۰}-۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۲}$

۱۲۲- در شکل زیر، d نیمساز زاویه xOy است. اگر $OE=۱۵$، $OD=۹$ و $CF=۳$ باشد، آنگاه مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟



۱) ۸۲
۲) ۸۴
۳) ۸۶
۴) ۸۸

۱۲۳- در شکل زیر چهارضلعی ذوزنقه است. مقدار b کدام است؟



۱) ۴/۵
۲) ۴
۳) ۳/۵
۴) ۵

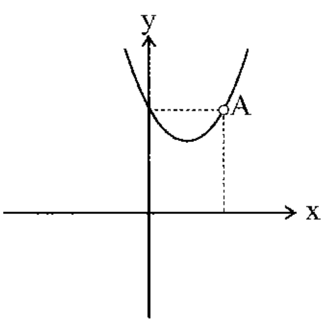
۱۲۴- اگر $x=\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}-\sqrt[۳]{۱-\sqrt{۲}}$ باشد، $\log x+\log(x^{۲}-۳)$ چند برابر $\log ۲$ است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۲۵- فرض کنید $f(x)=\frac{۳^{۲x}-۱}{۳^{۲x}+۱}$ و مقدار $f(\log_{۳}\sqrt{۲}+۱)\times f(\log_{۹}\sqrt{۲}-۱)$ را برابر A بگیرید. حاصل $\log_{۲}A+۱$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۲۶- شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{۳}+ax^{۲}+bx-۱}{x-۱}$ است. عرض نقطهٔ A چند برابر عرض نقطهٔ مینیمم است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۴}$

۱۲۷- تابع با ضابطه $f(x)=\frac{[-x]}{[x]+1}$ در چند نقطه از بازهٔ $(0,4)$ حد ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۱۲۸- از ۷ جفت کفش متمایز، به تصادف ۵ کفش انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال بین کفش‌های انتخاب‌شده، حداقل یک جفت وجود دارد؟

۱) $\frac{5}{7}$ ۲) $\frac{95}{143}$ ۳) $\frac{285}{286}$ ۴) $\frac{3}{143}$

۱۲۹- میانهٔ داده‌های ۲۳، ۸، ۱، ۱۰، ۴، ۱۶، ۳، ۸، ۲ و ۱۴ و $a+2$ برابر با ۸ است. اگر a جزو اعداد حسابی باشد، کدام گزینه واریانس مقادیر مختلف برای a را نشان می‌دهد؟

۱) $\frac{16}{3}$ ۲) $\frac{17}{4}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{35}{24}$

۱۳۰- جواب نامعادلهٔ $x-\sqrt{2-x}<b$ به‌صورت $-4\leq x$ $[a,2)$ است، بزرگ‌ترین طول بازهٔ جواب نامعادلهٔ $a<\frac{3x}{x-1}<b$ کدام است؟

۱) ۲٫۱ ۲) ۲٫۲ ۳) ۲٫۲۵ ۴) ۲٫۴

۱۳۱- نقطهٔ $A(2,3)$ روی نمودار تابع $g(x)=2f(2x-1)+1$ قرار دارد. مجموع طول و عرض نقطهٔ A' نظیر نقطهٔ A روی نمودار تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{2}$ ۲) -4 ۳) ۴ ۴) $-\frac{17}{2}$

۱۳۲- اگر α و β دو ریشهٔ متوالی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x+2\sin x+\cot x=-1$ باشد، نسبت بیشترین فاصله به کمترین فاصلهٔ α تا β چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) $\frac{11}{5}$ ۴) ۱۱

۱۳۳- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x\cos x\cos 2x$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۱۳۴- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+ax+b}{x-2}=0$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{\sqrt{2x+b}-\sqrt{2x}}$ چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) -1

۱۳۵- اگر $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x^2-1}=\frac{1}{4}$ باشد، مقدار شیب مماس بر منحنی $xf(6x-2)$ در $x=\frac{1}{2}$ کدام است؟ (f تابعی پیوسته است.)

۱) ۳ ۲) -3 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳۶- اگر $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ و $f(x)=x+\frac{1}{x}$ آهنگ لحظه‌ای تغییر gof در $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

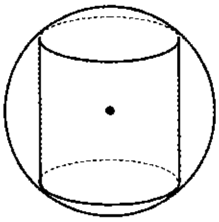
۱۳۷- نقاط بحرانی $f(x)=x^3+ax^2-bx$ در طول‌های ۳ و ۲- قرار دارند. اختلاف عرض اکسترمم‌های نسبی تابع چقدر است؟

۱) ۱۱۵٫۵ ۲) ۱۰۵٫۵ ۳) ۶۰٫۵ ۴) ۱۷٫۵

۱۳۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-4|\sqrt[3]{2x}$، نقاط بحرانی رئوس یک مثلث‌اند. عدد مساحت این مثلث چند برابر $\sqrt[3]{2}$ است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۶

۱۳۹- در شکل زیر، استوانه‌ای با حجم $12\sqrt{30}\pi$ داخل کره‌ای به شعاع ۶ محاط شده است. اگر صفحه‌ای افقی موازی قاعدهٔ استوانه آن را ببرد که از مرکز کره عبور کند، حاصل‌ضرب مساحت دو دایره دیده‌شده چقدر است؟



۱) $156\pi^2$

۲) $180\pi^2$

۳) $216\pi^2$

۴) $240\pi^2$

۱۴۰- در جعبهٔ A، ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ قرمز و در جعبهٔ B، ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ قرمز داریم. یک مهره از جعبهٔ A برمی‌داریم و در جعبهٔ B می‌گذاریم. حال یک مهره از جعبهٔ B برمی‌داریم. با کدام احتمال مهرهٔ اخیر قرمز است؟

۱) $\frac{11}{25}$　　۲) $\frac{12}{25}$　　۳) $\frac{13}{25}$　　۴) $\frac{14}{25}$

ریاضی

۱۱۱. گزینه ۲ درست است.

فرض کنید دنبالهٔ خطی $a_n = dn + e$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$\begin{cases} b_3 = 3 \\ b_8 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3d + e = 3 \\ 8d + e = 18 \end{cases} \Rightarrow d = 3 \,,\, e = -6 \Rightarrow b_n = 3n - 6$$

اگر دنبالهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $a_n = an^2 + bn + c$ باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} a_3 = -5 \\ a_4 = -3 \\ a_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b + c = -5 \\ 16a + 4b + c = -3 \\ 25a + 5b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \,,\, b = -5 \,,\, c = 1 \Rightarrow a_n = n^2 - 5n + 1$$

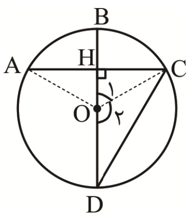
اکنون دنباله‌های a_n و b_n را مساوی قرار داده تا جملاتی که دو دنبالهٔ مساوی‌اند را بیابیم.

$$a_n = b_n \Rightarrow n^2 - 5n + 1 = 3n - 6 \Rightarrow n^2 - 8n + 7 = 0 \Rightarrow n = 1 \,,\, n = 7$$

پس مجموع شمارهٔ جملات برابر $1 + 7 = 8$ است.

۱۱۲. گزینه ۳ درست است.

با توجه به شکل مقابل داریم:



$$CH = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

$$\overset{\Delta}{OCH} : \measuredangle o_1 = 60^\circ$$

$$\Delta OCH : \begin{cases} OC = R \\ CH = R\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ OH = \dfrac{R}{2} \end{cases}$$

$$HB = OB - OH = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

$$\frac{S_{ABH}}{S_{OCD}} = \frac{\frac{1}{2}R\frac{\sqrt{3}}{2} \times (R - \frac{R}{2})}{\frac{1}{2}R \times R \times \operatorname{Sin}O_2} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{R}\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\cancel{R}}{2}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{R}\cancel{R} \times \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{1}{2}$$

۱۱۳. گزینه ۱ درست است.

$\sqrt{8}$ و $3\sqrt{3}$ در واقع $\sqrt{2}^3$ و $\sqrt{3}^3$ هستند و به فکر اتحاد چاق و لاغر می‌افتیم:

$$\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{8}}{5 + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}^3 - \sqrt{2}^3}{5 + \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}\sqrt{2})}{5 + \sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

جواب $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ می‌شود $\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$ یعنی $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

پس خواسته سؤال $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ است. یعنی $3 - 2 = 1$

۱۱۴. گزینه ۴ درست است.

برای اینکه این تابع، یک تابع خطی باشد، باید پیوسته بوده و شیب در تمام قسمت‌ها با هم برابر باشد.

$$y=\begin{cases}(a+1)x-1 & x\ge 1\\ bx+b & 0\le x<1\\ cx+d & x<0\end{cases}\qquad \xrightarrow{x=1} a+1-1=b+b\to a=2b\ (1)\qquad \xrightarrow{x=0} b=d\ (2)$$

$$\begin{cases}a+1=b\ \to\ b=-1\to a=-2\\ b=c\to c=-1\to d=-1\end{cases}$$

پس الف و ب و ج هر سه درست است.

۱۱۵. گزینه ۱ درست است.

چون دامنهٔ جذر تابع درجه ۳ نمی‌تواند محدود به یک بازه دو سر بسته باشد، پس این تابع باید تبدیل به تابع درجهٔ دو شود که ریشه‌های آن ۱- و ۲ است، پس $a=0$ و لذا:

$$f(x)=\sqrt{bx^2+cx+4}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=S\to S=1=-\frac{c}{b}\to c=2$$

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها}=p\to p=\frac{4}{b}=-2\to b=-2$$

چون تابع $g(x)$ خطی است، پس $d=0$ است.

حال چون از ناحیهٔ دوم مختصات عبور نمی‌کند، داریم:

$$g(x)=4x+e+2$$

باید عرض از مبدأ آن نامثبت باشد، پس:

$$e+2\le 0\to e\le -2$$

پس $\max(e)=-2$ و لذا:

$$\max(a+b+c+d+e)=0+(-2)+2+0+(-2)=-2$$

۱۱۶. گزینه ۴ درست است.

حروف P,N,M,S را می‌چینیم: $4!=24$، مثلاً: $\bigcirc P\bigcirc M\bigcirc N\bigcirc S\bigcirc$ و سپس در ۵ فضای بین آن‌ها و گوشه‌ها، ۳ حرف A قرار می‌دهیم: $\binom{5}{3}=10$ پس $24\times 10=240$ حالت داریم.

۱۱۷. گزینه ۳ درست است.

در هر جایگاه اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ می‌توانند قرار بگیرند. پس تعداد حالات کل برابر با $4^3=64$ است.

برای اینکه عدد سه رقمی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باید مجموع اعداد مضرب ۳ باشد. در کمترین حالت مجموع برابر ۶ (رمز $=222$) و در بزرگ‌ترین حالت مجموع برابر ۲۱ (رمز $=777$) است.

بنابراین حالات ممکن برای مجموع ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸ و ۲۱ هستند.

$$6:222\to 1$$

$$9:333,\ \underbrace{225}_{\text{۳حالت}}\to 1+3=4$$

$$12:\underbrace{237}_{\text{۳!حالت}},\ \underbrace{255}_{\text{۳حالت}}\to 3!+3=9$$

$$15:555,\ \underbrace{375}_{\text{۳!حالت}}\to 1+3!=7$$

$$18:$$

$$21:777\to 1$$

بنابراین ۲۲ حالت مطلوب هستند و احتمال خواسته‌شده برابر با $\frac{۱۱}{۳۲}=\frac{۲۲}{۶۴}$ است.

۱۱۸. گزینه ۱ درست است.

مختصات $A(-۲,۱)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند، پس:

$$۱=۴m-۴m+m^۲\rightarrow m^۲=۱\xrightarrow{m>۰}m=۱$$

پس $y=x^۲+۲x+۱$ می‌باشد.

$$\begin{cases}y=x^۲+۲x+۱\\ y=k\end{cases}\rightarrow x^۲+۲x+۱=k\rightarrow x^۲+۲x+(۱-k)=۰$$

با توجه به اطلاعات مسأله می‌توان نتیجه گرفت قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله $x^۲+۲x+(۱-k)=۰$ برابر یک است.

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۱\rightarrow\frac{\sqrt{۴-۴(۱-k)}}{۱}=۱\rightarrow\sqrt{۴k}=۱\rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

$$f(k)=f(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۲۵}{۱۶}$$

۱۱۹. گزینه ۴ درست است.

مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر کدام برابر صفر باشند.

$$\sqrt{۲-a-c}+\sqrt{۲b-d}=۰\Rightarrow ۲-a-c=۰\,,\,۲b-d=۰\Rightarrow a+c=۲\,,\,۲b=d$$

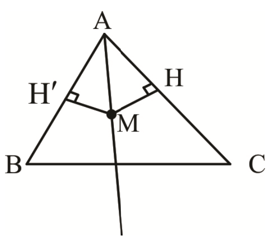
از طرفی چون a، b و c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی هستند، پس $۲b=a+c$ است، بنابراین $b=۱$ و $d=۲$ و معادله به صورت زیر است.

$$\frac{۱}{x^۲-۱}+\frac{۱}{x-۲}=\frac{۲}{x+۱}\xrightarrow{\times(x-۲)(x^۲-۱)}x-۲+x^۲-۱=۲(x-۲)(x-۱)\Rightarrow x^۲-۷x+۷=۰$$

که اختلاف ریشه‌ها برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۲۱}}{۱}=\sqrt{۲۱}$ است.

۱۲۰. گزینه ۲ درست است.

نقطهٔ M روی نیمساز زاویه $\hat{A}$ قرار دارد. پس فاصله‌اش از خطوط AB و AC یکسان است.



$$MH=MH'$$

معادله خط عبوری از B و A $\begin{matrix}A(۰,-۱)\\B(-۲,۱)\end{matrix}\rightarrow m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۱+۱}{-۲}=-۱$

$$AB: y=-x-۱\rightarrow y+x+۱=۰$$

معادلهٔ خط عبوری از A و C $\begin{matrix}A(۰,-۱)\\C(-۱,a)\end{matrix}\rightarrow m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a+۱}{-۱}$

$$AC: y=(-a-۱)x-۱$$

$$AC: y+(a+۱)x+۱=۰$$

$$MH'=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$MH=\frac{۲}{\sqrt{۱+(a+۱)^۲}}$$

$$\boxed{MH=MH'}\rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۱}=\frac{۲}{\sqrt{(a+۱)^۲+۱}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\frac{۲}{۱}=\frac{۴}{(a+۱)^۲+۱}$$

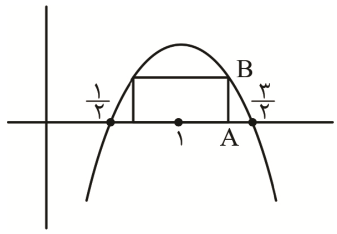
$$۲=(a+۱)^۲+۱$$

به ازاء $a=۰$ سه نقطه بر یک خط قرار می‌گیرند.

$$(a+1)^2=1\rightarrow \begin{cases} a+1=1\rightarrow a=0 \\ a+1=-1\rightarrow a=-2 \end{cases}$$

۱۲۱. گزینه ۳ درست است.

نقاط برخورد سهمی با محور xها را می‌یابیم.



$$-x^2+2x+\frac{3}{4}=0$$

$$\rightarrow -(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})=0\rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ x=\frac{3}{2}$$

اگر طول هر ضلع مربع را a فرض کنیم، به دلیل تقارن شکل عدد ۱ وسط ضلع مربع است و طول نقطهٔ A برابر $1+\frac{a}{2}$ می‌شود. درنتیجه مختصات نقطهٔ B به‌صورت $(1+\frac{a}{2},+a)$ خواهد شد و نقطهٔ B در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند.

$$a=-(1+\frac{a}{2})^2+2(1+\frac{a}{2})-\frac{3}{4}\xrightarrow{\times(-)}-a=1+\frac{a^2}{4}+a-2-a+\frac{3}{4}$$

$$a^2+4a-1=0\rightarrow a=\frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{2}\begin{cases} a=-2+\sqrt{5}>0\ \checkmark \\ a=-2-\sqrt{5}<0\ \times \end{cases}$$

$$\text{قطر مربع}=a\sqrt{2}=(-2+\sqrt{5})\times\sqrt{2}=-2\sqrt{2}+\sqrt{10}=\sqrt{10}-2\sqrt{2}$$

۱۲۲. گزینه ۲ درست است.

نیمساز مکان هندسی نقاطی است که از هر دو ضلع زاویه به یک فاصله باشند، بنابراین $ED=EF$، $AB=BC$ و در نتیجه $OD=OF$ و $OC=OA$.

حال داریم:

$$OE^2=EF^2+OF^2\Rightarrow 225=EF^2+81\Rightarrow EF^2=144\Rightarrow EF=12$$

همچنین طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{OF}{OC}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow\frac{9}{12}=\frac{12}{BC}\Rightarrow BC=16$$

برای پیدا کردن خواستهٔ سؤال، مساحت OEF را از مساحت OBC کم می‌کنیم و سپس دو برابر می‌کنیم:

$$2(S_{OBC}-S_{OEF})=2(\frac{12\times 16}{2}-\frac{9\times 12}{2})=192-108=84$$

۱۲۳. گزینه ۱ درست است.

طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$MN\parallel BC\Rightarrow\frac{a-1}{a}=\frac{a+1}{a+3}\Rightarrow a^2+a=a^2+2a-3\Rightarrow a=3$$

حالا از تناسب جزء به کل داریم:

$$\frac{a-1}{a+a-1}=\frac{a}{a+b}\xrightarrow{a=3}\frac{2}{5}=\frac{3}{3+b}\Rightarrow b=4/5$$

۱۲۴. گزینه ۴ درست است.

می‌توان نوشت:

$$\log x+\log x^2-3=\log x(x^2-3)=\log(x^3-3x)$$

فرض می‌کنیم:

$$b=\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad a=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$$

$$x=a-b \to x^3=(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

$$x^3=(\cancel{1}+\sqrt{2})-(\cancel{1}-\sqrt{2})-3(\underbrace{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}}_{\sqrt[3]{1-2}=-1})\times(\underbrace{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}}_{x})$$

$$x^3=2\sqrt{2}+3x$$

$$x^3-3x=2\sqrt{2} \to \log(x^3-3x)=\log 2\sqrt{2}=\log 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log 2$$

۱۲۵. گزینه ۴ درست است.

ابتدا مقادیر داده‌شده را به‌دست می‌آوریم.

$$f(\log_3^{\sqrt{2}+1})=\frac{3^{2\log_3^{\sqrt{2}+1}}-1}{3^{2\log_3^{\sqrt{2}+1}}+1}=\frac{3^{\log_3^{(\sqrt{2}+1)^2}}-1}{3^{\log_3^{(\sqrt{2}+1)^2}}+1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2-1}{(\sqrt{2}+1)^2+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+4}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(\log_9^{\sqrt{2}-1})=\frac{3^{2\log_9^{\sqrt{2}-1}}-1}{3^{2\log_9^{\sqrt{2}-1}}+1}=\frac{3^{\log_3^{\sqrt{2}-1}}-1}{3^{\log_3^{\sqrt{2}-1}}+1}=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$$

بنابراین $A=\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ و داریم:

$$\log_2^{A+1}=\log_2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\log_2^{2^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}$$

۱۲۶. گزینه ۱ درست است.

با توجه به شکل حد تابع در x_A به $\frac{0}{0}$ رسیده است، پس $x_A=1$ و داریم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1+a+b-1}{1-1}=\frac{0}{0}\to a+b=0$$

پس $b=-a$ و داریم:

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2-ax-1}{x-1}$$

حد تابع در ۱ با ساده کردن $x-1$ از صورت و مخرج یا قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\frac{x^3-1+ax(x-1)}{x-1}=x^2+x+1+ax\ ,\ x\neq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=3+a$$

حالا خط‌چین افقی در نمودار نشان می‌دهد این حد با $f(0)$ برابر است:

$$3+a=f(0)=1\Rightarrow a=-2$$

پس $\underset{(x\neq 1)}{f(x)=x^2-x+1}$ و عرض نقطهٔ مینیمم برابر است با:

$$x_s=+\frac{1}{2}$$

$$y_s = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

و داریم:

$$\frac{y_A}{y_{min}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

۱۲۷. گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم وقتی $x \to k \in \mathbb{Z}$، مقدار x صحیح نیست، پس $[-x] = -[x] - 1$ پس در اعداد غیرصحیح

$$f(x) = \frac{-[x]-1}{[x]+1} = -1$$

یعنی f همواره حد دارد و $\lim_{x\to k} f(x) = -1$

۱۲۸. گزینه ۲ درست است.

برای پیدا کردن احتمال آنکه در این ۵ کفش حداقل یک جفت وجود داشته باشد، حالت متمم یعنی هیچ جفتی وجود نداشته باشد را حساب می‌کنیم و از ۱ کم می‌کنیم. ابتدا ۵ جفت کفش انتخاب می‌کنیم و از هر جفت یک لنگه را انتخاب می‌کنیم:

$$\frac{\binom{7}{5}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{5}} = \frac{\frac{7\times 6}{2}\times 2^5}{\frac{14\times 13\times 12\times 11\times 10}{5\times 4\times 3\times 2}} = \frac{6\times 7\times 2^4}{14\times 13\times 11} = \frac{48}{143} \Rightarrow 1 - \frac{48}{143} = \frac{95}{143}$$

۱۲۹. گزینه ۳ درست است.

داده‌ها را بدون در نظر گرفتن داده $a+2$ مرتب می‌کنیم:

$1, 3, 4, 8, 8, 10, 14, 16, 23$

بنابراین $a+2$ می‌تواند ۰، ۱، ۲، ۳ و ... و ۸ باشد و درنتیجه a می‌تواند ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد. (دقت کنید a جزو اعداد حسابی است)

واریانس این اعداد را حساب می‌کنیم:

میانگین: $\frac{21}{7} = 3$

$$\sigma^2 = \frac{(0-3)^2 + (1-3)^2 + \cdots + (6-3)^2}{7} = \frac{9+4+1+0+1+4+9}{7} = 4$$

واریانس n داده که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d بدهند از فرمول $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}d^2$ نیز قابل محاسبه است.

۱۳۰. گزینه ۴ درست است.

$f(x) = x - \sqrt{2-x}$ اکیداً صعودی است، پس جواب نامعادلهٔ $-4 \le f(x) < b$ به‌صورت $f^{-1}(-4) \le x < f^{-1}(b)$ است و داریم:

$$a = f^{-1}(-4)\ ,\ 2 = f^{-1}(b)$$

$$f(a) = -4 \xrightarrow{\text{جستجو}} a = -2\ ,\ b = f(2) = 2$$

حالا نامعادلهٔ $-2 < \frac{3x}{x-1} < 2$ را داریم که به‌صورت $|\frac{3x}{x-1}| < 2$ بیان می‌شود.

پس:

$$|3x| < |2x-2|$$

به توان ۲:

$$(۳x)^۲ < (۲x-۲)^۲$$

$$\Rightarrow (۳x)^۲ - (۲x-۲)^۲ < ۰ \xrightarrow{\text{مزدوج}} (۳x+۲x-۲)(۳x-۲x+۲) < ۰ \Rightarrow (۵x-۲)(x+۲) < ۰$$

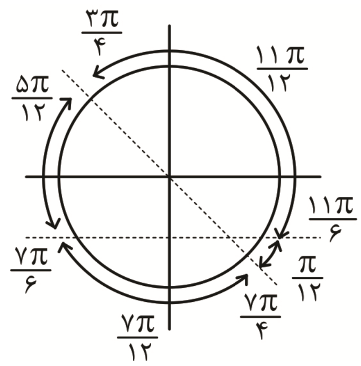
$$\xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} (-۲, \frac{۲}{۵}) \Rightarrow \text{طول} = ۲/۴$$

۱۳۱. گزینه ۳ درست است.

$$x_{A'} = ۲(۲) - ۱ = ۳$$

$$y_{A'} = \frac{۳-۱}{۲} = ۱ \quad \to x_{A'} + y_{A'} = ۴$$

۱۳۲. گزینه ۴ درست است.



$$۲\cos x + ۲\sin x = -۱ - \cot x$$

$$۲(\sin x + \cos x) = -(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}) \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = ۰ \\ \sin x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

زاویه‌ها را در دور اول مشخص می‌کنیم. و فاصله‌های هر دو نقطهٔ متوالی را روی دایره نشان می‌دهیم:

$$\frac{\max}{\min} = \frac{\frac{۱۱\pi}{۱۲}}{\frac{\pi}{۱۲}} = ۱۱$$

۱۳۳. گزینه ۳ درست است.

$$f(x) = \sin x \cos x \cos ۲x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x \cos ۲x = \frac{۱}{۴}\sin ۴x \to T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

۱۳۴. گزینه ۳ درست است.

در مخرج عامل $(x-۲)$ داریم و حد تابع در $x=۲$ صفر شده است، پس صورت حتماً $(x-۲)^۲$ دارد. (دقت کنید که نمی‌تواند $(x-۲)^۳$ داشته باشد.) پس $x^۳+ax+b$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} x^۳ + ax + b & x^۲ - ۴x + ۴ \\ \underline{x^۳ - ۴x^۲ + ۴x} & x + ۴ \\ ۴x^۲ + (a-۴)x + b & \\ \underline{۴x^۲ - ۱۶x + ۱۶} & \\ ۰ & \end{array} \quad \Rightarrow a = -۱۲ \,,\, b = ۱۶$$

حالا برای حد دوم، گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{\sqrt{۲x+b} - \sqrt{۲x}} = \frac{x+a-x}{۲x+b-۲x} \times \frac{\sqrt{۲x+b} + \sqrt{۲x}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$$

و در $+\infty$ نسبت جملات پرتوان برابر است با:

$$\frac{a}{b} \times \frac{۲\sqrt{۲x}}{۲\sqrt{x}} = \frac{-۱۲}{۱۶} \times \sqrt{۲} = \frac{-۳}{۴}\sqrt{۲}$$

۱۳۵. گزینه ۴ درست است.

از حد داده‌شده در مورد تابع پیوسته f نتیجه می‌شود $f(1)=-2$ و $\frac{f'(1)}{2}=\frac{1}{4}$ پس $f'(1)=\frac{1}{2}$. (دقت کنید کـه تعریـف مشتق $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ است و در مخرج این حد، عامل $(x+1)$ اضافه است.) حاصل حد را با قاعده هوپیتـال هم می‌توان محاسبه کرد. حالا شیب مماس بر منحنی تابع $y=xf(6x-2)$ برابر است با:

$$m=y'(\frac{1}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} y'=1f(6x-2)+6f'(6x-2)x \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} m=f(1)+3f'(1)=-2+3(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

۱۳۶. گزینه ۱ درست است.

ضابطهٔ gof را تشکیل دهیم.

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-4}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2}$$

$$=|x-\frac{1}{x}| \xrightarrow{0<x<1} =\frac{1}{x}-x$$

پس آهنگ تغییر آن در $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر است با:

$$y'=-\frac{1}{x^2}-1 \xrightarrow{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} -2-1=-3$$

۱۳۷. گزینه ۳ درست است.

این تابع مشتق‌پذیر است، پس طول نقاط بحرانی ریشه‌های مشتق هستند:

$$f'(x)=3x^2+2ax-b=0 \xrightarrow[x_2=3]{x_1=-2} S=-\frac{2a}{3}=1\ ,\ p=\frac{-b}{3}=-6$$

پس: $a=\frac{-3}{2}\ ,\ b=+18$ و داریم:

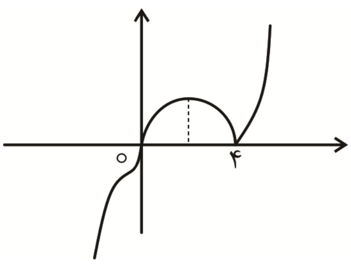
$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+18x$$

و عرض‌ها را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=27-\frac{27}{2}-54=-40/5 \\ f(-2)=-8-6+36=22 \end{array}\right\} \to \text{اختلاف}=60/5$$

۱۳۸. گزینه ۴ درست است.

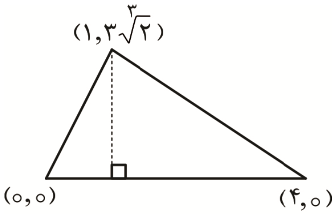
در $x=4$ نقطهٔ گوشه و در $x=0$ نقطه با مماس عمودی داریم. یک بحرانی دیگر هم بین ۰ و ۴ داریم که با مشتق پیدا می‌شود:



$$x<4 \Rightarrow f(x)=(4-x)\sqrt[3]{2x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-1\sqrt[3]{2x}+\frac{2(4-x)}{3\sqrt[3]{(2x)^2}}$$

$$f'(x)=\circ \Rightarrow \frac{۲(۴-x)}{۳\sqrt[۳]{(۲x)^{۲}}}=\sqrt[۳]{۲x} \Rightarrow ۸-۲x=۳(۲x) \Rightarrow x=۱$$



با جایگذاری در تابع داریم:

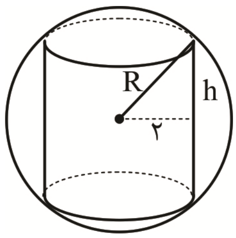
$$y=f(۱)=۳\sqrt[۳]{۲}$$

و مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۴\times ۳\sqrt[۳]{۲}}{۲}=۶\sqrt[۳]{۲}$$

۱۳۹. گزینه ۳ درست است.

ارتفاع استوانه را $۲h$ فرض می‌کنیم.



با توجه به شکل رابطهٔ $R^{۲}=۳۶=r^{۲}+h^{۲}$ برقرار است. همچنین با توجه به‌صورت سؤال $\pi r^{۲}(۲h)=۱۲\sqrt{۳\circ}\pi$ پس داریم:

$$r^{۲}h=۶\sqrt{۳\circ} \to r^{۴}h^{۲}=۳۶\times ۳\circ \xrightarrow{h^{۲}=۳۶-r^{۲}} r^{۴}\times(۳۶-r^{۲})=۳۶\times ۳\circ$$

با کمی دقت در معادله متوجه می‌شویم که $۳۶-r^{۲}=۳\circ$ و $r^{۴}=۳۶$، یعنی $r=\sqrt{۶}$ خواستهٔ سؤال حاصل‌ضرب مساحت قاعدهٔ استوانه و مساحت دایره با شعاع ۶ است، داریم:

$$۳۶\pi\times ۶\pi=۲۱۶\pi^{۲}$$

۱۴۰. گزینه ۴ درست است.

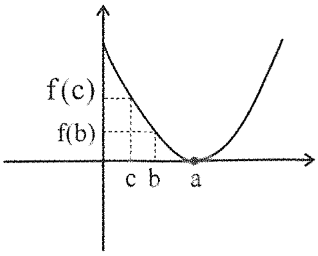
به احتمال $\frac{۲}{۵}$ مهرهٔ اول سفید و به احتمال $\frac{۳}{۵}$ مهرهٔ اول قرمز است.

$\xrightarrow{\frac{۲}{۵}}$ سفید $\to \frac{۵}{۱\circ}$ قرمز بودن

$\xrightarrow{\frac{۳}{۵}}$ قرمز $\to \frac{۶}{۱\circ}$ قرمز بودن

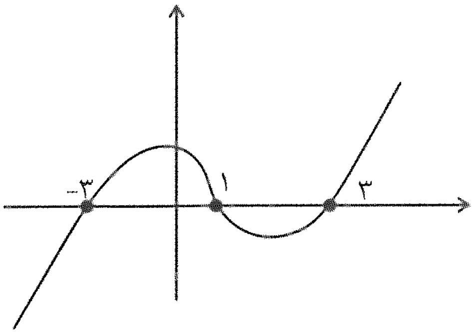
$$P(A)=\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۱\circ}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۶}{۱\circ}=\frac{۱}{۵}+\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۴}{۲۵}$$

۱۱۱- در شکل زیر، $f(x)$ قسمتی از یک سهمی است که در $x=a$ برمحور xها مماس است. اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی و $f(a)$، $f(b)$ و $f(c)$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟



۱) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{3}-1$
۳) $\sqrt{2}-1$
۴) $\sqrt{5}-2$

۱۱۲- اگر نمودار تابع $y=f(x+2)$ به‌صورت زیر باشد، به‌ازای کدام مقدار m، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $f(x+m)=0$ برابر صفر است؟



۱) $\frac{1}{3}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $-\frac{7}{3}$
۴) $\frac{7}{3}$

۱۱۳- ریشه‌های معادلهٔ $x^2+5x+2m+3=0$ دو عدد صحیح متوالی‌اند. اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دو $x^2+ax+b=0$ با ضرایب گویا، m $\frac{2}{\sqrt{3}}+2$ باشد، حاصل a^2-b کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۱۱۴- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{3x^2+3x}{x^2+1}$ از خط $y=2$ در بازه (a,b) پایین‌تر باشد، بیشترین مقدار $2b-a$ کدام است؟

۱) $3(\sqrt{17}+1)$ ۲) $3(\sqrt{17}-1)$ ۳) $\frac{3}{2}(\sqrt{17}-1)$ ۴) $\frac{3}{2}(\sqrt{17}+1)$

۱۱۵- برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2-2x}$ به‌صورت $R-\{a,b\}$ است، $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

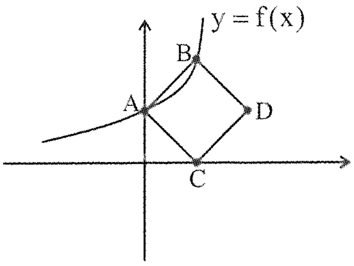
۱۱۶- A و B دو پیشامد از فضای نمونه S هستند. اگر $P(A)=2P(B)=0/8$ و $P(A-B)+P(B-A)=0/6$ باشد، حاصل $P(B'\cap A)$ کدام است؟

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۵

۱۱۷- با حروف کلمه بادکنک چند کلمه چهار حرفی می‌توان نوشت؟

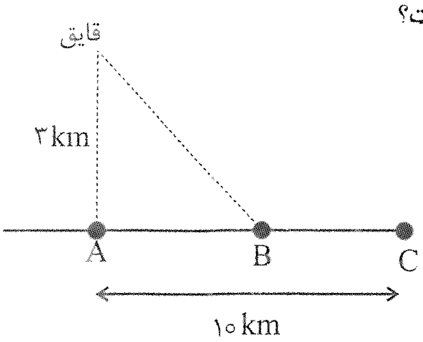
۱) ۱۹۲ ۲) ۲۸۸ ۳) ۷۶ ۴) ۱۶۸

۱۱۸- مطابق شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=a^x$ از رئوس A و B از مربع ABCD می‌گذرد. اگر نقطهٔ C، نقطهٔ برخورد منحنی $f^{-1}(x-1)$ با محور xها باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ B کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱۹- مطابق شکل زیر، قایقی در فاصلهٔ ۳ کیلومتری نقطه A قرار دارد. قایقران قصد دارد با قایق تا نقطـه B در سـاحل بـرود و سپس فاصلهٔ B تا C را با ماشین طی کند. اگر میزان مصرف سوخت قایق و ماشین به ترتیب دو لیتر در کیلومتر و یک لیتر در کیلومتر باشد و کلاً ۱۶ لیتر سوخت در دسترس باشد، فاصلهٔ نقطهٔ B از A کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۱۰

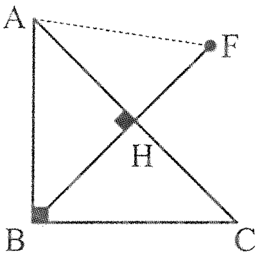
۱۲۰- معادلهٔ $\frac{x-1}{x^2-2x}=\frac{2}{x}+\frac{kx}{x-2}$ فقط یک ریشهٔ حقیقی دارد. در همهٔ حالت‌های ممکن، اختلاف بـین بـزرگ‌تـرین ریشهٔ ممکن و میانگین مقادیر ریشه‌ها در همهٔ حالات، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۷

۱۲۱- اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=x^2-5x+2$ باشند، مجموع ریشه‌هـای معادلـهٔ $\beta x^4+11x^2-\alpha=2$ کدام است؟

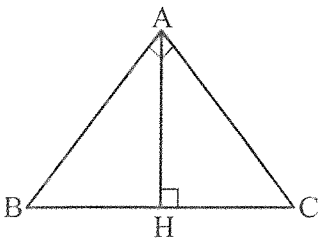
۱) صفر
۲) ۱
۳) -1
۴) ۲

۱۲۲- در شکل زیر، مثلث ABC قائم‌الزاویه، $AB=4$ و $BC=3$ است. اگر ارتفاع BH را تا نقطه F امتداد دهـیم، مقدار HF چقدر باشد تا دو مثلث غیرهمنهشت AHF و ABH، متشابه باشند؟



۱) $\frac{64}{15}$
۲) ۴
۳) $\frac{16}{5}$
۴) $\frac{8}{5}$

۱۲۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، از رأس C، خطی رسم می‌کنیم تا ارتفاع AH و ضلع AB را به‌ترتیب در نقاط O و D قطع کند. اگر $OA=15$ و $OH=9$ و $OC=OD$ باشد، طول ضلع AB کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۲۴
۳) $24\sqrt{5}$
۴) $12\sqrt{5}$

۱۲۴- اگر تابع $f(x)=ax+b$ با انتقال به اندازهٔ ۲ واحد در جهت مثبت محور x، بر تابع وارون f منطبق گردد، مقـدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۲

۱۲۵- اگر $\frac{۱۰}{۹} = \frac{\sin ۱۰۰۰^\circ + \cos ۵۵۰^\circ}{۲\sin ۲۶۰^\circ - \cos ۱۰۰^\circ}$ باشد، حاصل $\sin ۷۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\sqrt{۲۶}}{۲۶}$	۲) $\frac{۱۲}{۱۳}$	۳) $\frac{\sqrt{۲۶}}{۲۶}$	۴) $\frac{۵}{۱۳}$

۱۲۶- اگر $f(x) = a^x , (a > ۱)$ و $g(x) = |f(x) - k| , (k > ۲)$ باشد، معادلهٔ $g(|x|) = k$ چند جواب متمایز دارد؟

۱) ۱	۲) ۲	۳) ۳	۴) ۴

۱۲۷- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن، نمودار تابع $f(x) = \frac{\sqrt{۳}^{۴x+۲} - ۹^{\frac{۳}{۴}x}}{۲^x - x^۲}$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات واقع می‌شود، کدام است؟

۱) ۱	۲) ۲	۳) ۳	۴) ۴

۱۲۸- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم که مجموع دو عدد ظاهرشده، عددی اول است، با چه احتمالی، اعداد روشده متوالی می‌باشند؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$	۲) $\frac{۴}{۱۵}$	۳) $\frac{۲}{۳}$	۴) $\frac{۴}{۵}$

۱۲۹- اگر میانگین و واریانس داده‌های آماری $x_۱ , x_۲ , \dots , x_{۱۰۰}$ که $۳ < x_i < ۱۰$ است، به‌ترتیب برابر با ۵ و ۳ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $۰/۱x_۱ - ۲ , ۰/۱x_۲ - ۲ , \dots , ۰/۱x_{۱۰۰} - ۲$ کدام است؟

۱) -۲	۲) $\frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}$	۳) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$	۴) تعریف نشده

۱۳۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+۳}{x+۲} & , x \geq ۰ \\ ax - b & , x < ۰ \end{cases}$ به‌ازای بیشترین مقادیر صحیح a و b وارون‌پذیر باشد، حاصل $f^{-۱}\left(-f^{-۱}(۴)\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۳}$	۲) ۷	۳) $-\frac{۷}{۳}$	۴) وجود ندارد.

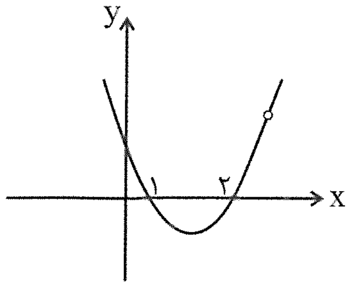
۱۳۱- اگر $f(x) = \sin(\pi + x)\sin(\frac{\pi}{۲} + x)(\cos^۴ x - \sin^۴ x)$ باشد، شیب خطی که دو نقطه ماکزیمم و مینیمم متوالی از نمودار f را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\pi}$	۲) $\frac{۲}{\pi}$	۳) $\frac{۳}{\pi}$	۴) $\frac{۴}{\pi}$

۱۳۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin ۳x \cos ۲x}{\cos x + \cos ۲x} = ۰$ روی فاصله $(۰, ۲\pi)$ کدام است؟

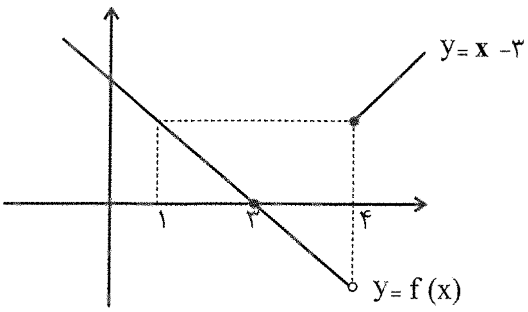
۱) ۷π	۲) ۸π	۳) ۶π	۴) ۹π

۱۳۳- اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^{۳}-ax^{۲}+bx+c}{x-۴}$ به‌صورت زیر و حد این تابع وقتی $x \to ۴$ برابر با k باشد، حاصل $a+b+c+k$ کدام است؟



۱) ۱۵
۲) ۱۷
۳) ۱۹
۴) ۲۱

۱۳۴- نمودار $y=f(x)$ به‌صورت زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱^{+})}[f(۲-۲x)]$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{-۱}{۲}$
۳) -۱
۴) صفر

۱۳۵- تابع $f(x)=\frac{ax-\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}{۴x^{n}-۱۳}$ مفروض است، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{۱}{۶}$ باشد، $f'(۳)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{-۱}{۶}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

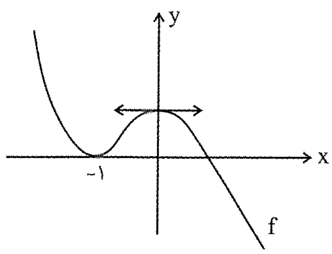
۱۳۶- خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱,۲)$ و $(-۱,۳)$ بر منحنی پیوستهٔ $y=g(x)$ در نقطهٔ $x=۳$ مماس است. اگر منحنی توابع f و g در این نقطه برهم مماس باشند، حاصل $\lim\limits_{x\to۳}\frac{f^{۲}(x)+۴f(x)-۵}{۳-x}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۳۷- اگر تابع $f=\begin{cases}\frac{۲}{۳}x^{۳}-۲x^{۲}-۶x+۱x<۲ & x<۲\\ mx^{۲}-۸x-۴m & x\geq۲\end{cases}$ دارای دو نقطهٔ بحرانی باشد، m چند عدد از مجموعه اعداد حسابی را نمی‌تواند اختیار کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۳۸- تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+۴$ در شکل زیر رسم شده است. مقدار a کدام است؟



۱) -۱۶
۲) -۱۲
۳) -۸
۴) -۴

۱۳۹- دایره‌ای که بر دو خط به معادلات $y=۴-x$ و $x+y=-۲$ مماس است، از نیمساز ناحیه دوم و چهارم، وتری با کدام طول جدا می‌کند؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۴۰- ظرف اول حاوی ۶ مهره آبی و ۵ مهره قرمز و ظرف دوم حاوی ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز است. اگر در برداشتن یک مهره به‌طور تصادفی از یکی از ظرف‌ها، احتمال آبی و قرمز با هم برابر باشد، چند مهره قرمز باید به ظرف اول اضافه کنیم؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۴

ریاضی

۱۱۱. گزینه ۳ درست است.

c, b, a به‌ترتیب یک دنبالهٔ هندسی می‌سازند، پس آن‌ها را به‌ترتیب a، aq، aq^2 در نظر می‌گیریم.

از طرفی $f(c), f(b), f(a)$ به‌ترتیب یک دنبالهٔ حسابی می‌سازند پس:

$$2f(b) = f(a) + f(c)$$

نقاط c, b, a روی سهمی قرار گرفته‌اند. معادله سهمی که در نقطه‌ای به طول $x = a$ بر محور xها مماس است، به‌صورت $f(x) = k(x-a)^2$ در نظر می‌گیریم. پس:

$$f(a) = 0$$

$$f(b) = f(aq) = k(aq - a)^2 = ka^2(q-1)^2$$

$$f(c) = f(aq^2) = k(aq^2 - a)^2 = ka^2(q^2-1)^2$$

با جایگذاری مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ و $f(c)$ در رابطهٔ $2f(b) = f(a) + f(c)$ داریم:

$$2\cancel{ka^2}(q-1)^2 = \cancel{ka^2}(q^2-1)^2 + 0$$

$$\xrightarrow[a\neq 0]{k\neq 0} 2\cancel{(q-1)^2} = \cancel{(q-1)^2}(q+1)^2 \xrightarrow{q\neq 1} (q+1)^2 = 2 \rightarrow$$

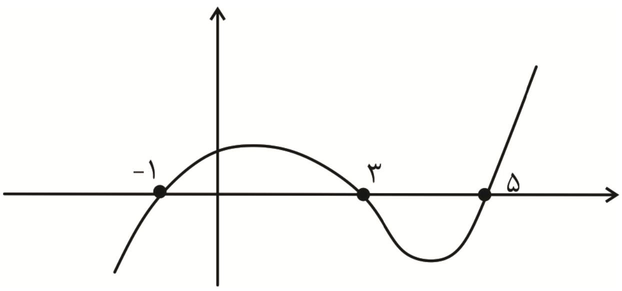
$$\begin{cases} q+1 = +\sqrt{2} \rightarrow q = \sqrt{2} - 1 \\ q+1 = -\sqrt{2} \rightarrow q = -\sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

دنبالهٔ هندسی تشکیل‌شده یک دنباله نزولی است، پس $q = \sqrt{2} - 1$ قابل قبول است.

(دقت کنید که جملات c, b, a متفاوت هستند، پس $q \neq 1$)

۱۱۲. گزینه ۴ درست است.

ابتدا از روی نمودار $y=f(x+2)$، نمودار $f(x)$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است نمودار $f(x+2)$ را دو واحد به‌سمت راست منتقل کنیم:



با توجه به‌شکل، ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$، $x=-1,3,5$ هستند. پس ریشه‌های معادلهٔ $f(x+m)=0$ عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_1=-1-m \\ x_2=3-m \\ x_3=5-m \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow 7-3m=0 \Rightarrow m=\frac{7}{3}$$

۱۱۳. گزینه ۲ درست است.

اختلاف دو عدد صحیح متوالی برابر با یک است، پس داریم:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow 1=\frac{\sqrt{25-4(2m+3)}}{|1|} \Rightarrow \sqrt{13-8m}=1 \Rightarrow 13-8m=1 \Rightarrow 8m=12 \Rightarrow m=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2+\frac{2}{\sqrt{3}}m=2+\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{3}{2})=2+\sqrt{3}$$

در معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب گویا که یک ریشهٔ آن، $2+\sqrt{3}$ است، ریشهٔ دیگر به‌صورت $2-\sqrt{3}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} S=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4 \\ P=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow a=-4, b=1$$

حاصل a^2-b برابر با $(-4)^2-1=15$ است.

۱۱۴. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{3x^2+3x}{x^2+1}<2 \Rightarrow 3x^2+3x<2x^2+2 \Rightarrow x^2+3x-2<0 \rightarrow$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \frac{-3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

$$2b-a=2(\frac{-3+\sqrt{17}}{2})-(\frac{-3-\sqrt{17}}{2})=-3+\sqrt{17}+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}=\frac{3}{2}(\sqrt{17}-1)$$

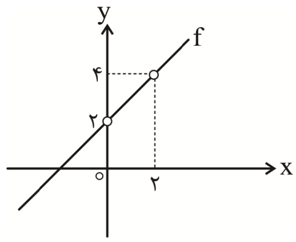
۱۱۵. گزینه ۱ درست است.

در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2-2x}$ داریم:

$$f(x)=\frac{x(x^2-4)}{x(x-2)}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2 \ , \ x\neq 0,2$$

پس برد تابع f، کل مقادیر حقیقی است، به‌جز مقادیر این تابع در $x=0$ و $x=2$، یعنی:

$R_f = R - \{۲,۴\}$



پس: $a + b = ۶$

۱۱۶. گزینه ۴ درست است.

$$P(A-B)+P(B-A)=۰/۶ \Rightarrow (P(A)-P(A\cap B))+(P(B)-P(A\cap B))=۰/۶$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=۰/۶ \xrightarrow[P(B)=۰/۴]{P(A)=۰/۸} ۱/۲-۲P(A\cap B)=۰/۶$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۳$$

از طرفی دیگر داریم:

$$P(B'\cap A)=P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۸-۰/۳=۰/۵$$

۱۱۷. گزینه ۱ درست است.

بادکنک دو تا (ک) دارد، ۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) صفر یا یک «ک» در تشکیل کلمه شرکت کند:

انگار قرار است با حروف کلمهٔ «بادکن»، کلمهٔ چهار حرفی بسازیم:

$$۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$$

ب) هر دو حرف «ک» در تشکیل کلمه شرکت کنند:

دو حرف دیگر را از میان حروف «بادن» انتخاب و سپس ۴ حرف موجود را به روش جایگشت با تکرار، جابه‌جا می‌کنیم:

$$\binom{۴}{۲}\times\frac{۴!}{۲!}=۷۲$$

تعداد کل حالات، طبق اصل جمع برابر است با:

$$۱۲۰+۷۲=۱۹۲$$

۱۱۸. گزینه ۴ درست است.

ابتدا تکلیف نقطه C را مشخص می‌کنیم:

$$f^{-۱}(x-۱)=۰ \xrightarrow{\text{وارون}} f(۰)=x-۱ \xrightarrow{f(x)=a^x} ۱=x-۱ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow C(۲,۰)$$

از طرفی می‌دانیم تابع نمایی $y=a^x$ در نقطهٔ $(۰,۱)$ محور yها را قطع می‌کند، پس: $A(۰,۱)$

همچنین نقطهٔ $B(x,a^x)$ نیز روی $f(x)=a^x$ قرار دارد.

حالا دقت کنید:

چهار ضلعی $ABCD$ مربع است پس: ۱) خطوط AB و AC برهم عمودند و شیب‌هایشان عکس و قرینه هم است. ۲) اندازه AB و AC باهم برابر است.

$$۱)\, m_{AC}=\frac{۰-۱}{۲-۰}=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow m_{AB}=۲ \Rightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=۲$$

درنتیجه:

$$\frac{a^x-۱}{x-۰}=۲ \to a^x-۱=۲x \quad *$$

$$۲)\, AB=\sqrt{(a^x-۱)^۲+x^۲} \xrightarrow{*} \sqrt{(۲x)^۲+x^۲}=\sqrt{۵} \Rightarrow ۵x^۲=۵ \Rightarrow x^۲=۱$$

$$AC=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$$

با توجه به نمودار تابع، $x=۱$ قابل قبول است.

با جایگذاری $x=۱$ در $*$ داریم:

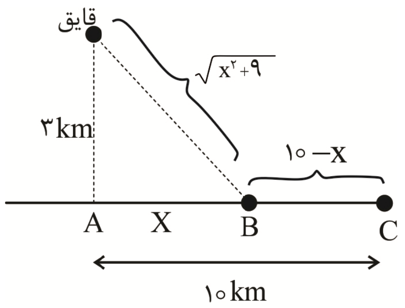
$$a^{۱}-۱=۲\rightarrow a=۳$$

پس مختصات نقطهٔ B برابر است با:

$$B(x,a^{x})\xrightarrow[a=۳]{x=۱}B(۱,۳)\Rightarrow x_B+y_B=۱+۳=۴$$

۱۱۹. گزینه ۲ درست است.

با توجه به شکل زیر، میزان مسافت طی‌شده توسط قایق، طبق فیثاغورس $\sqrt{x^{۲}+۹}$ کیلومتر و میزان مسافت طی‌شده توسط ماشین، $۱۰-x$ کیلومتر است.



پس کل میزان سوخت مصرفی که باید برابر با ۱۶ لیتر شود، عبارت‌است از:

$$\sqrt{x^{۲}+۹}\ (۲)+(۱۰-x)(۱)=۱۶\Rightarrow ۲\sqrt{x^{۲}+۹}=x+۶$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}}۴(x^{۲}+۹)=x^{۲}+۱۲x+۳۶\Rightarrow ۳x^{۲}-۱۲x=۰\Rightarrow x=۰,۴$$

$x=۴$ جواب تست است.

۱۲۰. گزینه ۳ درست است.

طرفین معادله را در عبارت $x(x-۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{kx}{x-۲}+\frac{۲}{x}=\frac{x-۱}{x^{۲}-۲x}\xrightarrow{\times(x^{۲}-۲x)}kx^{۲}+۲(x-۲)=x-۱\Rightarrow kx^{۲}+۲x-۴=x-۱$$

$$\Rightarrow kx^{۲}+x-۳=۰$$

برای آنکه معادلهٔ فوق، فقط یک ریشه داشته باشد، سه حالت زیر وجود دارد:

حالت اول: $k=۰$ و معادله به‌صورت معادلهٔ درجهٔ اول $x-۳=۰$ شود که فقط $x=۳$ ریشه است.

حالت دوم: $\Delta=۰$ و معادلهٔ درجهٔ دو فوق، فقط یک ریشه داشته باشد:

$$\Delta=۰\Rightarrow ۱+۱۲k=۰\Rightarrow k=\frac{-۱}{۱۲}$$

$$x=\frac{-b}{۲a}\rightarrow=\frac{-۱}{۲(\frac{-۱}{۱۲})}=۶$$

حالت سوم: معادلهٔ درجهٔ دو فوق، دو ریشه داشته باشد، ولی یکی از ریشه‌ها، ریشهٔ مخرج $(x=۰\ \text{یا}\ ۲)$ باشد.

$$x=۰\xrightarrow{\text{صدق}}-۳=۰\quad \text{غیرممکن}$$

$$x=۲\xrightarrow{\text{صدق}}۴k+۲-۳=۰\Rightarrow k=\frac{۱}{۴}\rightarrow \text{معادله}:\frac{۱}{۴}x^{۲}+x-۳=۰\rightarrow \text{ریشه‌دیگر}:x=-۶$$

بزرگ‌ترین ریشه $x=۶$ و میانگین ریشه‌ها $\bar{x}=\frac{۳+۶+(-۶)}{۳}=۱$ می‌باشد که اختلاف آن‌ها ۵ است.

۱۲۱. گزینه ۱ درست است.

راه حل اول: در معادلهٔ درجه دوم $x^2-5x+2=0$ داریم: $\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}$

پس هر دو ریشه α و β مثبت هستند.

حالا در معادله $\beta x^4+11x^2-\alpha=2$ با تغییر متغیر $x^2=t$ داریم:

$$\beta t^2+11t-(\alpha+2)=0\rightarrow\begin{cases}\beta>0\\\alpha>0\rightarrow\alpha+2>0\rightarrow-(\alpha+2)<0\end{cases}$$

پس در این معادلهٔ درجهٔ دو، $a>0$ و $c<0$ و چون ac همواره منفی است، می‌توان گفت این معادله دارای دو ریشه مختلف العلامت $(t_2<0, t_1>0)$ است.

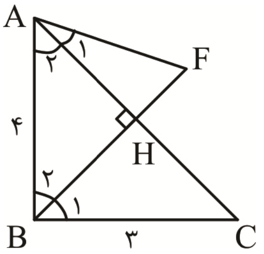
واضح است $x^2=t_1$ دارای دو جواب $x=+\sqrt{t_1}$ و $x=+\sqrt{t_1}$ است و $x^2=t_2$ جواب ندارد و لذا مجموع ریشه‌های موجود، برابر صفر است.

راه حل دوم: در معادلهٔ دو مجذوری $ax^4+bx^2+c=0$، در صورت وجود ریشه، مجموع ریشه‌ها همواره صفر است.

(دقت کنید که با توجه به گزینه‌ها، حتماً ریشه داریم.)

۱۲۲. گزینه ۱ درست است.

برای آنکه دو مثلث AHF و ABH متشابه باشند، با توجه به برابری $\hat{H}_1=\hat{H}_2=90$ یکی از دو حالت زیر مدنظر است:



$\begin{cases}\hat{B}_2=\hat{F}, \hat{A}_1=\hat{A}_2\rightarrow \text{دو مثلث بنا به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت می‌شوند}\rightarrow \text{غیرقابل قبول}\\ \hat{B}_2=\hat{A}_1, \hat{A}_2=\hat{F}: \text{قابل قبول است}\end{cases}$

پس داریم:

$$\frac{AH}{HF}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow AH^2=BH\times HF$$

$$BH: ABC \text{ ارتفاع نظیر وتر در مثلث } =\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$$

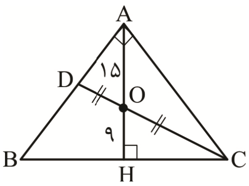
$$AH: ABH \text{ فیثاغورس در مثلث } : \sqrt{(AB)^2-(BH)^2}=\sqrt{4^2-(\frac{12}{5})^2}=\frac{16}{5}$$

پس داریم:

$$(\frac{16}{5})^2=\frac{12}{5}\times HF\Rightarrow HF=\frac{\frac{256}{25}}{\frac{12}{5}}=\frac{64}{15}$$

۱۲۳. گزینه ۳ درست است.

شکل مسئله به‌صورت زیر است:



چون در مثلث قائم‌الزاویه ADC، $OD = OC$ است، پس AO میانهٔ وارد بر وتر است و:

$$OC = OD = OA = ۱۵$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویه OCH، طبق فیثاغورس داریم:

$$HC = ۱۲$$

نهایتاً در مثلث قائم‌الزاویه ABC بنابر روابط طولی داریم:

$$\begin{cases}(AH)^۲ = BH\times HC \Rightarrow ۲۴^۲ = BH\times ۱۲ \Rightarrow BH = ۴۸\\(AB)^۲ = BH\times BC \Rightarrow (AB)^۲ = ۴۸(۴۸+۱۲) \Rightarrow AB = \sqrt{۴۸\times ۶۰} = ۲۴\sqrt{۵}\end{cases}$$

۱۲۴. گزینه ۲ درست است.

با انتقال ۲ واحد به‌راست، شیب f تغییر نمی‌کند پس:

$$m_{f^{-۱}} = m_f \Rightarrow \frac{۱}{a} = a \Rightarrow a = \pm ۱$$

پس $f(x) = x+b$ یا $f(x) = -x+b$

تابع خطی با شیب -۱ با وارونش برابر است که با صورت سؤال تناقض دارد؛ بنابراین فقط $f(x) = x+b$ و داریم:

$$f^{-۱}(x) = x-b$$

$$f(x) = x+b \xrightarrow{\text{دو واحد به راست}} f(x) = x+b-۲ \xrightarrow{\text{بر وارون منطبق است}} f^{-۱}(x) = x+b-۲$$

پس باید:

$$x-b = x+b-۲ \Rightarrow b = ۱$$

پس $f^{-۱}(x) = x-۱$ و $f^{-۱}(۴) = ۳$ است.

۱۲۵. گزینه ۲ درست است.

در ابتدا داریم:

$$\frac{\sin ۱۰۰۰^\circ + \cos ۵۵۰^\circ}{۲\sin ۲۶۰^\circ - \cos ۱۰۰^\circ} \xrightarrow[\text{آن را کم می‌کنیم}]{\text{۳۶۰° و مضارب}} = \frac{\sin(-۸۰^\circ) + \cos ۱۹۰^\circ}{۲\sin ۲۶۰^\circ - \cos ۱۰۰^\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{برحسب ۱۰° می‌نویسیم}} = \frac{-\sin(۹۰^\circ - ۱۰^\circ) + \cos(۱۸۰^\circ + ۱۰^\circ)}{۲\sin(۲۷۰^\circ - ۱۰^\circ) - \cos(۹۰^\circ + ۱۰^\circ)}$$

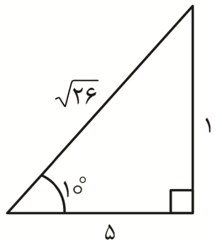
$$\Rightarrow \frac{-\cos ۱۰ - \cos ۱۰}{-۲\cos ۱۰ + \sin ۱۰} = \frac{۱۰}{۹} \Rightarrow -۹\cos ۱۰^\circ = -۱۰\cos ۱۰^\circ + ۵\sin ۱۰^\circ \Rightarrow \cos ۱۰^\circ = ۵\sin ۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow \tan ۱۰^\circ = \frac{۱}{۵}$$

حالا برای محاسبهٔ $\sin ۷۰^\circ$ داریم:

$$\sin ۷۰^\circ = \cos ۲۰^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۰^\circ$$

با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی برای $\tan ۱۰^\circ = \frac{۱}{۵}$ داریم:

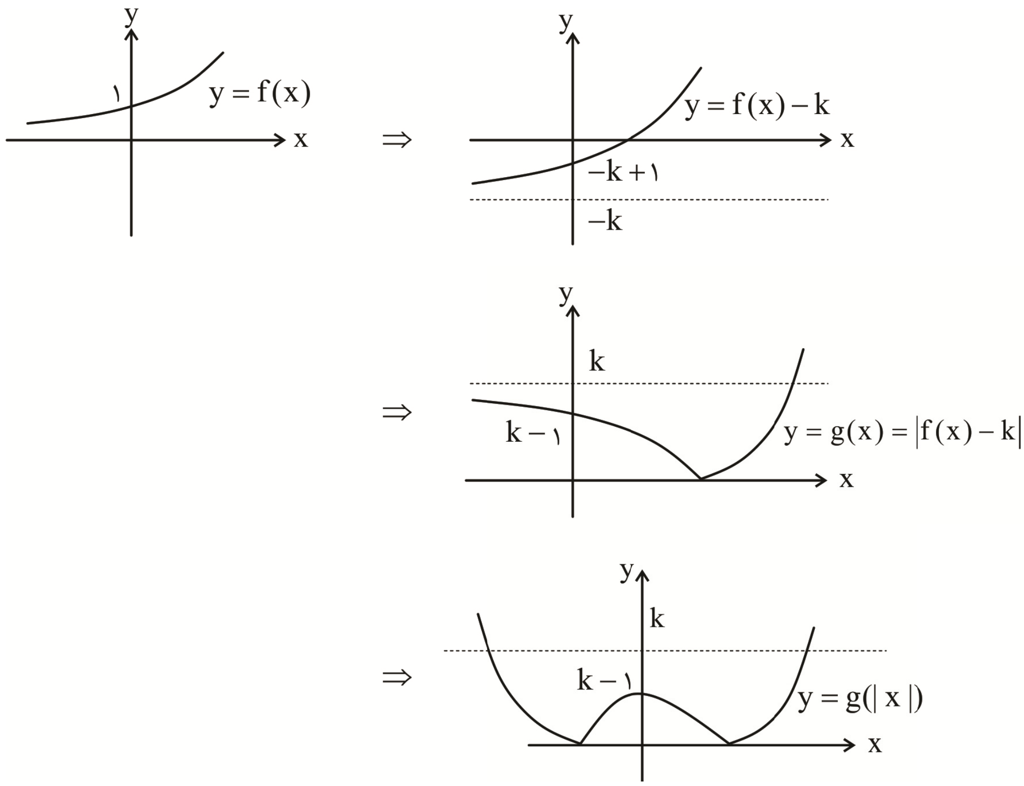


$$\rightarrow \sin 10^\circ = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

پس:
$$1-2\sin^2 10^\circ = 1-2\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{12}{13}$$

۱۲۶. گزینه ۲ درست است.

نمودار توابع $g(x)$ و سپس $g(|x|)$ را رسم کرده و سپس تعداد تلاقی‌های آن با تابع ثابت $y=k$ را به‌دست می‌آوریم:



واضح است که خط $y=k$، نمودار تابع را در دو نقطه متمایز قطع می‌کند و معادله دو ریشه دارد.

۱۲۷. گزینه ۲ درست است.

برای آنکه نمودار تابع، در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات واقع شود، لازم است که:

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

پس باید نامعادلهٔ $f(x) < 0$ را به‌ازای $x > 0$ حل کنیم:

$$\frac{\sqrt{3}^{4x+2} - 9^{\frac{3}{4}x}}{2^x - x^2} < 0$$

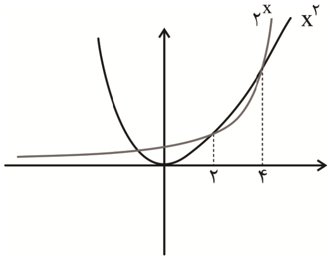
ابتدا عبارت $\sqrt{3}^{4x+2} - 9^{3x}$ را تعیین علامت می‌کنیم و برای این منظور ریشه‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{3^{4x+2}}-9^{\frac{3x}{4}}=0 \Rightarrow \sqrt{3^{4x+2}}=9^{\frac{3}{4}x} \Rightarrow 3^{2x+1}=3^{\frac{3}{2}x}$$

$$\Rightarrow 2x+1=\frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2}x=-1 \Rightarrow x=-2 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} & & -2 & \\ \hline y & - & \circ & + \end{array}$$

پس در $x>0$ که مدنظر ما است، صورت کسر همواره مثبت است و لذا کافی است که مخرج کسر منفی باشد:

نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



در $x>0$ فقط در بازهٔ $(2,4)$ نمودار x^2 بالاتر از نمودار 2^x است.

پس بزرگ‌ترین بازهٔ موردنظر که در آن $\begin{cases} x>0 \\ f(x)<0 \end{cases}$ رخ می‌دهد،

بازهٔ $(2,4)$ و طول آن برابر با ۲ واحد است.

۱۲۸. گزینه ۱ درست است.

اگر قرار باشد با پرتاب دو تاس، مجموع اعداد ظاهرشده، اول شود، آن عدد اول می‌تواند یکی از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ باشد، پس فضای نمونه‌ای مسئله برابر است با:

$$\left\{\underbrace{(1,1)}_{\text{مجموع ۲}},\underbrace{(1,2),(2,1)}_{\text{مجموع ۳}},\underbrace{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)}_{\text{مجموع ۵}},\underbrace{(1,6),(6,1),(5,2),(2,5),(3,4),(4,3)}_{\text{مجموع ۷}},\underbrace{(5,6),(6,5)}_{\text{مجموع ۱۱}}\right\}$$

این حالات بالا، مواردی که اعداد روشده متوالی هستند را در نظر می‌گیریم:

$\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(5,6),(6,5)\} \rightarrow$ ۸حالت

پس احتمال موردنظر برابر با $\frac{8}{15}$ است.

۱۲۹. گزینه ۴ درست است.

محدودهٔ داده‌های جدید را به‌دست می‌آوریم:

$$3<x_i<10 \Rightarrow 0/3<0/1x_i<1 \Rightarrow -1/7<0/1x_i-2<-1$$

همان‌طور که می‌بینید، داده‌های جدید، همگی منفی هستند و طبق تذکر کتاب درسی سال یازدهم، از ضریب تغییرات فقط برای داده‌های مثبت استفاده می‌شود، پس استفاده از آن در اینجا بی‌معنی است.

۱۳۰. گزینه ۴ درست است.

می‌دانیم که تابع $\mathbf{y=\frac{-x+3}{x+2}}$ در $\mathbf{x\geq 0}$، نزولی أکید است. پس $\mathbf{y=ax-b}$ هم باید نزولی اکید باشد $\mathbf{(a<0)}$ و ضمناً

$$f(\bar{0})\geq f(\overset{+}{0}) \Rightarrow -b\geq \frac{3}{2} \Rightarrow b\leq \frac{-3}{2}$$

پس بیشترین مقادیر صحیح ممکن برای a و b عبارت‌اند از: $a=-1$ و $b=-2$ و تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x+3}{x+2} & x\geq 0 \\ -x+2 & x<0 \end{cases}$$

برای محاسبهٔ $f^{-1}(4)$، تابع $f(x)$ را برابر با ۴ قرار می‌دهیم که از ضابطهٔ بالا، ریشه‌ای به‌دست نمی‌آید. اما از ضابطهٔ پایین به $x=-2$ می‌رسیم. پس:

$$f^{-1}(-f^{-1}(4))=f^{-1}(-(-2))=f^{-1}(2)$$

نهایتاً برای محاسبهٔ $f^{-1}(2)$، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را برابر با ۲ می‌گذاریم:

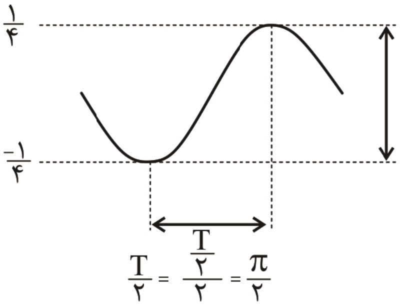
$$\left\{\begin{array}{l} \text{ضابطه بالا}: \dfrac{-x+3}{x+2}=2 \Rightarrow -x+3=2x+4 \Rightarrow x=\dfrac{-1}{3} \quad \text{غ ق ق} \\ \text{ضابطه پایین}: -x+2=2 \Rightarrow x=0 \quad \text{غ ق ق} \end{array}\right. \rightarrow \text{جواب ندارد}$$

۱۳۱. گزینه ۲ درست است.

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = -\sin\cos x \cos ۲x = -\frac{۱}{۲}\sin ۲x \cos ۲x = \frac{-۱}{۴}\sin ۴x$$

واضح است که فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی از نمودار سینوسی، روی محور xها برابر با $\frac{T}{۲}$ و فاصلهٔ آن‌ها روی محور yها برابر با $y_{max} - y_{min}$ است.



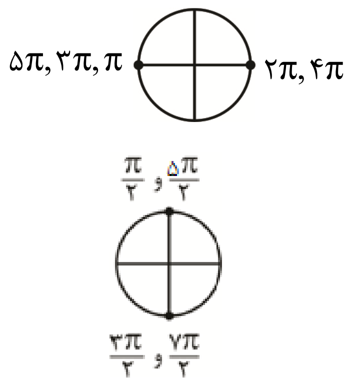
$$y_{max} - y_{min} = \frac{۱}{۴} - (-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲}$$

شیب خط واصل بین این دو نقطه برابر با $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۲}{\pi}$ است.

۱۳۲. گزینه ۳ درست است.

باید معادلهٔ $\sin ۳x \cos ۲x = ۰$ را حل کنیم و البته حواسمان به ریشه‌های مخرج یعنی ریشه‌های معادلهٔ $\cos x + \cos ۲x = ۰$ هم باشد:

$$\begin{cases} \sin ۳x = ۰ \\ ۰ < ۳x < ۶\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos ۲x = ۰ \\ ۰ < ۲x < ۴\pi \end{cases}$$



$$\to x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}, \pi, \frac{۴\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\to x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}$$

$$\cos ۲x + \cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ + \cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\cos x = t} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = -۱, \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -۱ \to x = \pi \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \to x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳} \end{cases}$$

پس $\frac{\pi}{۳}$ و π و $\frac{۵\pi}{۳}$ به عنوان ریشه‌های مخرج از مجموعه جواب‌های بالا حذف می‌شوند و مجموع ریشه‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$\frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} + \frac{۳\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} + \frac{۷\pi}{۴} = ۶\pi$$

۱۳۳. گزینه ۳ درست است.

با توجه به نمودار تابع $f(x)$، $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های صورت و $x=۴$ به‌عنوان نقطهٔ توخالی، ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است، پس ضابطهٔ آن برابر است با:

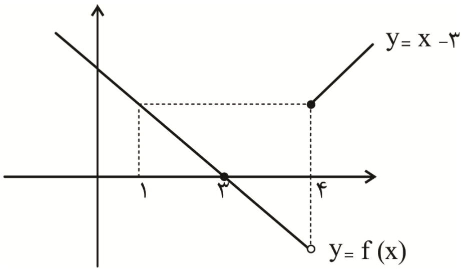
$$f(x)=\frac{(x-۱)(x-۲)(x-۴)}{x-۴}=\frac{x^۳-۷x^۲+۱۴x-۸}{x-۴}\rightarrow\begin{cases}a=۷\\b=۱۴\\c=-۸\end{cases}$$

حد تابع در $x=۴$ را نیز محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۱)(x-۲)(x-۴)}{x-۴}=۳\times ۲=۶=k\rightarrow a+b+c+k=۱۹$$

۱۳۴. گزینه ۳ درست است.

$$\lim_{x\to(-۱^+)}[f(۲-۲x)]=\lim_{x\to ۴^-}[f(x)]$$



برای محاسبه حد چپ تابع در $x=۴$، باید معادلهٔ نیم‌خط سمت چپ را بنویسیم.

ابتدا دقت کنید که معادلهٔ نیم‌خط سمت راست، $y=x-۳$ است و از نقطهٔ $(۴,۱)$ می‌گذرد. با توجه به هم عرض بودن نقاطی به طول $x=۱$ و $x=۴$ در نمودار، پس نیم خط سمت چپ هم از نقطهٔ $(۱,۱)$ می‌گذرد و با توجه به این که نقطه $(۳,۰)$ هم بر آن واقع است، معادله آن به‌صورت $y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$ است. پس:

$$\lim_{x\to ۴^-}[f(x)]=\left[(\frac{-۱}{۲})^+\right]=-۱$$

۱۳۵. گزینه ۳ درست است.

برای محاسبهٔحد تابع در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}\sim\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۴x^n}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}n=۱\\ \frac{a}{۴}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

پس:

$$f(x)=\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۳}$$

چون $f'(۳)$ را می‌خواهیم و عبارت موجود در صورت کسر، عامل صفرکننده است، داریم:

$$f'(x) = (\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2 - 1})'_{x=3} \times (\frac{1}{4x - 13})_{x=3}$$

$$= (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}(2x))_{x=3} \times (\frac{1}{4x - 13})_{x=3}$$

$$= (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})(6)) \times (-1) = \frac{-1}{6}$$

۱۳۶. گزینه ۲ درست است.

معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(1,2)$ و $(-1,3)$، $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$ است. چون این خط در نقطهٔ $x = 3$ بر منحنی g مماس است، داریم:

$$\begin{cases} g(3) = \frac{-1}{2}(3) + \frac{5}{2} = 1 \\ g'(3) = m_{\text{خط}} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

از طرفی، منحنی‌های f و g در نقطهٔ $x = 3$ برهم مماسند، پس:

$$\begin{cases} f(3) = g(3) = 1 \\ f'(3) = g'(3) = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

حالا با داشتن $f(3) = 1$ و $f'(3) = \frac{-1}{2}$، حاصل تعریف مشتق خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = -(2\underbrace{f(3)}_{1}\underbrace{f'(3)}_{\frac{-1}{2}} + 4\underbrace{f'(3)}_{\frac{-1}{2}}) = -(-3) = 3$$

۱۳۷. گزینه ۲ درست است.

برای پیدا کردن نقاط بحرانی، ابتدا نقطهٔ مرزی $x = 2$ را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(2^-) \xrightarrow{\text{ضابطهٔ بالا}} = \frac{16}{3} - 8 - 12 + 1 = \frac{-41}{3} \\ f(2^+) \xrightarrow{\text{ضابطهٔ پایین}} = 4m - 8 - 4m = -8 \end{cases}$$

پس $x = 2$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر و بحرانی است.

در گام بعدی، مشتق ضابطه‌ها را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) \xrightarrow{\text{ضابطهٔ بالا}} = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, -1$$

با توجه به محدودهٔ $x < 2$، فقط $x = -1$ قابل قبول است.

پس تا همینجا دو نقطهٔ بحرانی $x = 2$ و $x = -1$ قطعی است؛ بنابراین نقطهٔ بحرانی دیگری نباید داشته باشیم. درحالی‌که:

$$f'(x) \xrightarrow{\text{ضابطهٔ پایین}} = 2mx - 8 = 0 x = \frac{8}{2m} = \frac{4}{m}$$

پس $x = \frac{4}{m}$ باید غیرقابل قبول شود، یعنی یا عددی کوچک‌تر از ۲ باشد و در محدودهٔ ضابطهٔ پایینی قرار نگیرد، یا دقیقاً $x = 2$ باشد و تکراری محسوب شود:

$$\frac{4}{m} \le 2 \Rightarrow \frac{4 - 2m}{m} \le 0 \Rightarrow \frac{2m - 4}{m} \ge 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } 2 \le m$$

پس m مقادیر حسابی ۱ و ۰ را نمی‌تواند اختیار کند.

۱۳۸. گزینه ۳ درست است.

با توجه به نمودار رسم‌شده داریم:

$$f'(0)=0 \to 3ax^2+2bx+c=0 \xrightarrow{x=0}$$
$$f'(-1)=0 \to 3a+2b(-1)=0 \to 3a=2b$$
$$f(-1)=0 \to a(-1)^3+b(-1)^2+4=0 \to -a+b+4=0$$

در نتیجه $a=-8$ است.

۱۳۹. گزینه ۱ درست است.

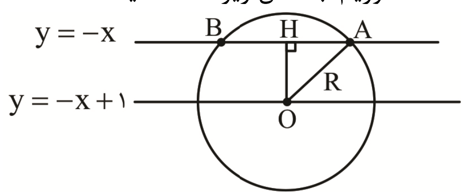
دو خط موازی $y+x+2=0, y+x-4=0$ بر دایره مماس شده‌اند، پس:

اولاً فاصله بین این دو خط برابر قطر دایره است:

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|-4-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=2R \to R=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

ثانیاً مرکز دایره روی خط $y+x+\frac{-4+2}{2}=0$ است که با این خطوط، موازی و در وسط آن‌ها قرار دارد.

حالا می‌خواهیم طول وتری که خط $y=-x$ بر روی دایره ایجاد می‌کند را به‌دست آوریم. به‌شکل زیر دقت کنید:



$$OH: \underset{(y+x-1=0,\ y+x=0)}{\text{فاصله دوخط موازی}} = \frac{|-1-0|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AOH: R^2=OH^2+AH^2 \to AH=\sqrt{R^2-OH^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2$$

$$\Rightarrow AB=2AH=4$$

۱۴۰. گزینه ۲ درست است.

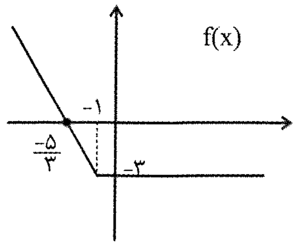
فرض کنیم x مهره قرمز به ظرف اول اضافه کرده‌ایم، پس:

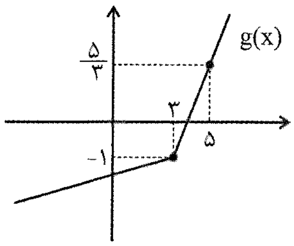
$$P(\text{آبی})=\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{11+x}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{6}{11+x}+\frac{5}{8}\right)$$
$$P(\text{قرمز})=\left(\frac{1}{2}\times\frac{5+x}{11+x}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5+x}{11+x}+\frac{3}{8}\right)$$
$$P(\text{آبی})=P(\text{قرمز})$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{6}{11+x}+\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5+x}{11+x}+\frac{3}{8}\right)\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{x-1}{11+x}\Rightarrow 11+x=4x-4\Rightarrow x=5$$

۱۱۱- سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ گذرا از نقاط $(۲,c)$ و $(-۲,۱۰)$، برخط $y-۸=۰$ مماس است. مساحت مثلثی که رئوس آن، نقطه‌ای با عرض c و صفرهای سهمی $f(x)$ هستند، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۱۲- با توجه به نمودار توابع f و g، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۳-gof(x)}$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟





۱) صفر
۲) ۳
۳) ۴
۴) بی‌شمار

۱۱۳- تاسی را پرتاب کرده و عدد رو شده را به‌جای m در معادلهٔ $mx^{۲}-(m-۳)x-۰/۷۵=۰$ قرار می‌دهیم. احتمال اینکه تفاضل مکعبات ریشه‌های حقیقی متمایز این معادله، با تفاضل مربعات ریشه‌های آن برابر باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۱۴- به‌ازای چه مقدار k، معادلهٔ $\frac{x-k^{۲}+۵}{x-۲}=x-۱$ فقط یک جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۱۵- تابع $f(x)=|۲k-x^{۳}|$ در بازهٔ $(k,+\infty)$ به شرط $k<۰$ اکیداً صعودی است. کمترین مقدار k کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

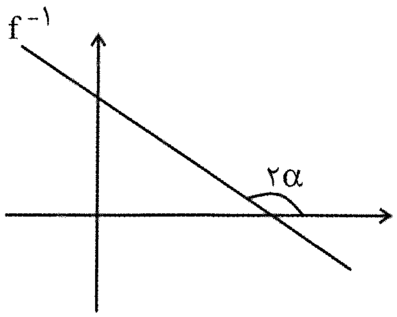
۱۱۶- اگر $f(x)=x^{۲}+[x]$ و $f\left(af(\sqrt{۳})\right)=۲$ باشد، مقدار a کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) $\frac{-۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۱۷- اگر $\log_{۳}^{a}$ و $\log_{۳}^{b}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۴x+۱=۰$ باشند، حاصل $\dfrac{\log_{۹}^{a}}{\log_{b}^{\sqrt[۳]{۳}}}-ab-۸\log_{ab}^{a}\log_{ab}^{b}$ کدام است؟

۱) -۸۰ ۲) -۸۱ ۳) ۸۲ ۴) ۸۳

۱۱۸- در شکل زیر، نمودار تابع $f^{-۱}$ رسم شده است. اگر $\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|f(x)|}{f^{-۱}(x)}$ کدام است؟

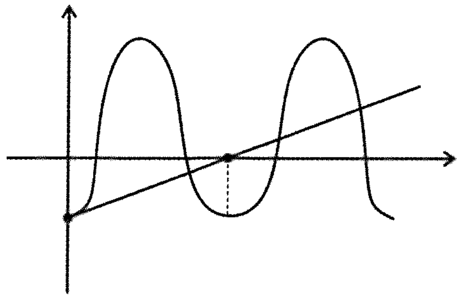


۱) $\frac{۹}{۱۶}$
۲) $\frac{۱۶}{۹}$
۳) $\frac{-۹}{۱۶}$
۴) $\frac{-۱۶}{۹}$

۱۱۹- اگر $A=\dfrac{\cot ۲۵^\circ}{\tan ۵۰^\circ}$ و $B=\dfrac{\tan ۶۵^\circ}{\sin ۵۰^\circ}$، حاصل $A-B$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) ۲

۱۲۰- در شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=a\sin\left(\pi(bx+\frac{۱}{۲})\right)+۲$ و خط $۲x-y=۳$ رسم شده است. کمترین مقدار $۲a+۳b$ کدام است؟



۱) -۱۴
۲) -۶
۳) ۶
۴) ۱۴

۱۲۱- قدرمطلق تفاضل جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\dfrac{\sin\frac{x}{۲}}{۱+\cos\frac{x}{۲}}=\dfrac{۱}{\sin\frac{x}{۲}}+\cot\frac{x}{۲}$ در بازهٔ $[-\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) ۲π ۴) ۴π

۱۲۲- اگر $f^{-۱}(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۷$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{f^{-۱}(x)-۳f(x)+۸}{|x^۲+x+[\frac{-۵}{۲}x]|}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) ۳ ۴) صفر

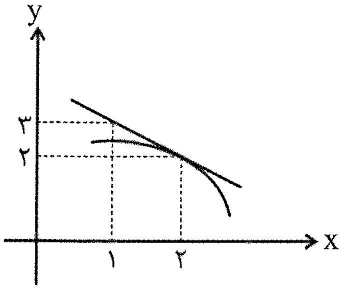
۱۲۳- حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^n+|x|+۱}{bx^n+|x-۲|}$ کدام نمی‌تواند باشد؟ (a , b اعداد حقیقی متمایزند.)

۱) $\frac{a}{b}$ ۲) $\frac{a+۱}{b+۱}$ ۳) $\frac{a-۱}{b-۱}$ ۴) ۱

۱۲۴- اگر تابع $f(x)=(x-۲)[x^۳+ax]+۲a$ که $(a\in\mathbb{Z})$ است، فقط در یک نقطهٔ صحیح $x=b$ پیوسته باشد، تابع $g(x)=[\frac{x}{۲}]+[-x]$ در $x=b$:

۱) حد دارد اما پیوسته نیست. ۲) فقط پیوستگی راست دارد.
۳) فقط پیوستگی چپ دارد. ۴) پیوسته است.

۱۲۵- با توجه به نمودار تابع f، مشتق تابع $y=(x^۲-۱)f\left(\dfrac{x+۱}{x-۱}\right)$ در $x=۳$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۳۲

۱۲۶- تابع $f(x)=|x^3-x^2|$ در نقطهٔ $x=m$ مشتق‌ناپذیر است. اگر $n=\lim\limits_{x\to m^-}\dfrac{x^2f(x)-m^2f(m)}{x-m}$ باشد، آهنگ متوسط تغییر تابع $g(x)=x^2-5x+\dfrac{3}{2}$ در بازهٔ $[m,n+4]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع g در کدام نقطه برابر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۷- نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$، سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث چند برابر محیط آن است؟

۱) $3(\sqrt{2}-1)$ ۲) $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$ ۳) $3(\sqrt{2}+1)$ ۴) $\frac{3}{2}(\sqrt{2}+1)$

۱۲۸- قرینه نقطه A واقع بر سهمی $f(x)=x^2$ و قرینهٔ نقطه B واقع بر $g(x)=x^3$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن‌ها را به‌ترتیب A' و B' می‌نامیم. اگر طول نقاط A و B، بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، اختلاف ماکزیمم طول پاره‌خط AA' و ماکزیمم طول پاره‌خط BB'، کدام است؟

۱) $8\sqrt{3}+9$ ۲) $\dfrac{(8\sqrt{3}+9)\sqrt{2}}{36}$ ۳) $8\sqrt{3}-9$ ۴) $\dfrac{(8\sqrt{3}-9)\sqrt{2}}{36}$

۱۲۹- ماکزیمم مقدار ضریب تغییرات دسته‌های چهارتایی از اعداد فرد متوالی سه‌رقمی، تقریباً کدام است؟ $(\sqrt{5}=2/2)$

۱) ۰/۲۲ ۲) ۰/۰۲۲ ۳) ۰/۴۸ ۴) ۰/۰۴۸

۱۳۰- حروف کلمهٔ «ESTEGHLAL» را در نظر بگیرید. دو بسته به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

بستهٔ A: شامل تمام حروفی که بیش از یک‌بار تکرار شده‌اند (به‌همراه تکرارهایشان)

بستهٔ B: شامل تمام حروف غیرتکراری

با این حروف، چند کلمهٔ ۹ حرفی می‌توان نوشت، به‌طوری که حروف بستهٔ A با حروف بستهٔ B، یکی در میان قرار بگیرند و ضمناً اگر حروف بسته B را از کلمه حذف کنیم، هیچ دو حرف باقی‌مانده یکسانی کنارهم نباشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۲۸۸۰

۱۳۱- سه‌تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده فرد است، با چه احتمالی این عدد در بازهٔ $[4,14]$ قرار دارد؟

۱) $\frac{7}{108}$ ۲) $\frac{7}{54}$ ۳) $\frac{47}{54}$ ۴) $\frac{101}{108}$

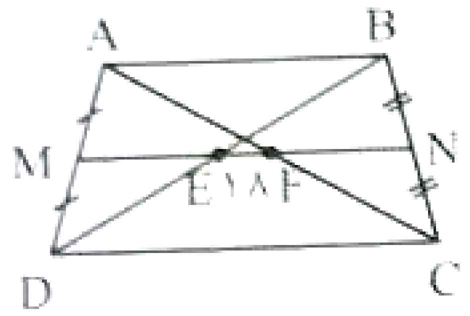
۱۳۲- جعبهٔ A شامل ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و جعبهٔ B شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است. دو مهره، متوالیاً از جعبهٔ A خارج می‌کنیم. اولی را بدون رؤیت کنار می‌گذاریم. دومی را رؤیت می‌کنیم، کنار می‌گذاریم و با توجه به‌رنگ آن، دو مهره از رنگ مخالف به ظرف A اضافه می‌کنیم. نهایتاً یک مهرهٔ از جعبهٔ A خارج کرده و در جعبهٔ B قرار می‌دهیم. اگر یک مهره از جعبهٔ B انتخاب کنیم، با کدام احتمال، این مهره سفید است؟

۱) ۰/۹۳ ۲) ۰/۹۲ ۳) ۰/۴۶۵ ۴) ۰/۴۶

۱۳۳- خط به معادلهٔ $(4m+2)x+(-9m-1)y=7$ به‌ازای هر m از رأس مستطیلی که دو ضلع آن منطبق بـر خطـوط $4x+y=3$ و $x-4y=5$ است، می‌گذرد. کمترین فاصلهٔ محل تلاقی قطرهای این مستطیل از اضلاع، چند برابر $\sqrt{17}$ است؟

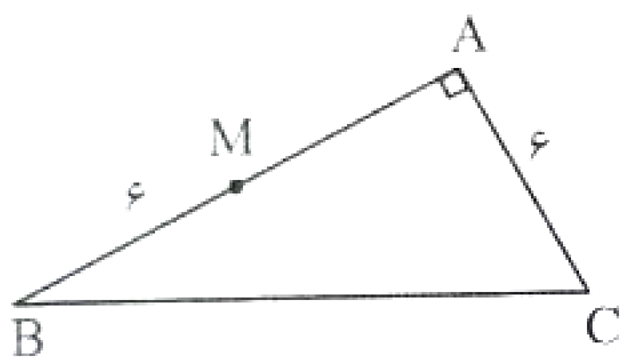
۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۱۳۴- در ذوزنقهٔ زیر، پاره‌خط MN وسط‌های دو ساق را به‌هم وصل کرده و قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه چهار برابر قاعدهٔ کوچک آن است. اگر ارتفاع ذوزنقه برابر با ۶ باشد، مساحت این ذوزنقه کدام است؟



۱) ۱۰/۸
۲) ۱۸
۳) ۲۱/۶
۴) ۳۶

۱۳۵- در مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر، از نقطهٔ M، عمودی به طول ۴ واحد بر ضلع BC رسم می‌کنیم. اندازهٔ میانهٔ وارد بر ضـلع BC کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴/۵
۳) ۶
۴) ۹

۱۳۶- اگر $A=\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{4.5}-\sqrt{12.5}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}$ باشد، حاصل $3-\dfrac{-A}{3-2\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

۱۳۷- اگر $n(A\cup B)=4n(A)-2$ و $n(B-A)=n(B)-n(A)=13$ باشد، $n(A\cap B)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۸

۱۳۸- a و b و c طول سه ضلع یک مثلث و سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی هستند. اگر ab، ac و bc سه جملـهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، محل تلاقی ارتفاع‌های این مثلث بر کدام نقطه واقع است؟

۱) یکی از رئوس ۲) نقطه‌ای خارج مثلث
۳) محل تلاقی میانه‌ها ۴) هر سه مورد، امکان‌پذیر است.

۱۳۹- توابع $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{\dfrac{x-2}{4-x}}$ و $g(x)=\sqrt{-2x^2-2ax+b}+c$ با هم برابرند، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) -12 ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) -8

۱۴۰- دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-4y+1=0$، محور yها را در نقاط M و N قطع می‌کند. شعاع دایره‌ای که از نقاط M و N گذشته و در نقطه‌ای به طول واحد بر محور xها مماس باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۴

ریاضی

۱۱۱. گزینه ۳ درست است.

سهمی $f(x)=ax^{2}+bx+c$ حتماً از نقطهٔ $(0,c)$ نیز می‌گذرد و چون نقاط $(0,c)$ و $(2,c)$ دو نقطه با عرض یکسان هستند، پس طول نقطهٔ رأس سهمی $x=\frac{0+2}{2}=1$ می‌شود.

از طرفی سهمی برخط $y=8$ مماس است و می‌دانیم تنها خط افقی مماس برسهمی، خط افقی گذرنده از رأس سهمی است، پس عرض نقطهٔرأس سهمی نیز $y=8$ می‌باشد.

حالا با دانستن این‌که رأس سهمی نقطهٔ $(1,8)$ است و سهمی از نقطهٔ $(-2,-10)$ نیز می‌گذرد، داریم:

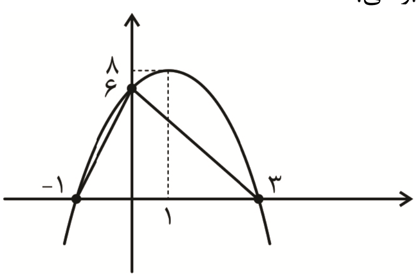
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=1\Rightarrow b=-2a\\ f(1)=8\Rightarrow a+b+c=8\xrightarrow{b=-2a}\boxed{-a+c=8}\\ f(-2)=-10\Rightarrow 4a-2b+c=-10\xrightarrow{b=-2a}\boxed{8a+c=-10}\end{cases}$$

با حل دستگاه اخیر داریم:

$$\begin{cases}a=-2\Rightarrow b=4\\ c=6\end{cases}$$

پس سهمی به‌صورت $f(x)=-2x^2+4x+6$ است و نمودار آن به‌صورت زیر می‌باشد:



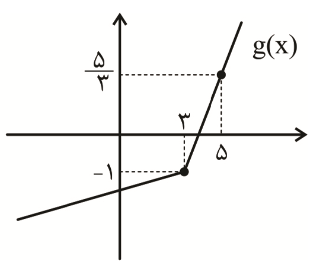
صفرهای سهمی: $-2x^2+4x+6=0\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=3,-1$

واضح است که مثلث موردنظر، مثلثی به‌طول قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۶ و دارای مساحت $S=\dfrac{4\times 6}{2}=12$ است.

۱۱۲. گزینه ۲ درست است.

برای تعیین دامنهٔ تابع y داریم:

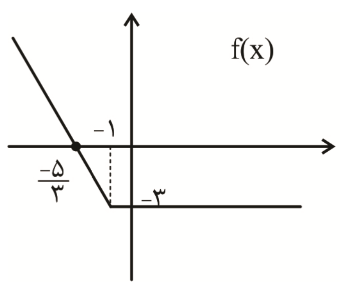
$$3-gof(x)\geq 0\Rightarrow gof(x)\leq 3\Rightarrow g(f(x))\leq 3$$



برای آن‌که $g(O)\leq 3$ برقرار باشد، باتوجه به نمودار تابع g کافی است معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(3,-1)$ و $(5,\frac{5}{3})$ را بنویسیم و آن را کوچک‌تر یا مساوی ۳ قرار دهیم:

$$y=\frac{4}{3}x-5\leq 3\Rightarrow \frac{4}{3}x\leq 8\Rightarrow x\leq 6$$

پس $g(f(x))\leq 3$ وقتی درست است که $f(x)\leq 6$ باشد.



برای آن‌که $f(x) \le ۶$ باشد، با توجه به نمودار تابع f، کافی است معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(-۱,-۳)$ و $(\frac{-۵}{۳},۰)$ را بنویسیم و آن را کوچک‌تر یا مساوی ۶ قرار دهیم.

$$y=\frac{-۹}{۲}x-\frac{۱۵}{۲}\le ۶ \Rightarrow \frac{-۹}{۲}x\le\frac{۲۷}{۲}\Rightarrow x\ge -۳$$

پس نهایتاً دامنهٔ تابع y به‌صورت $[-۳,+\infty)$ است و شامل سه عدد صحیح منفی می‌باشد.

۱۱۳. گزینه ۲ درست است.

ریشه‌های متمایز معادلهٔ $mx^۲-(m-۳)x-۰/۷۵=۰$ را α و β در نظر گرفته و داریم:

$$\alpha^۳-\beta^۳=\alpha^۲-\beta^۲\Rightarrow(\alpha-\beta)(a^۲+\alpha\beta+\beta^۲)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

چون α و β متمایزند، پس عبارت $(\alpha-\beta)$ مخالف صفر بوده و با حذف آن از طرفین تساوی داریم:

$$\alpha^۲+\alpha\beta+\beta^۲=\alpha+\beta\Rightarrow\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta=\alpha+\beta\Rightarrow$$

$$(s^۲-۲p)+p=s\Rightarrow s^۲-s-p=۰\Rightarrow\left(\frac{m-۳}{m}\right)^۲-\left(\frac{m-۳}{m}\right)+\frac{۳}{۴m}=۰$$

با ضرب طرفین این معادله در $m^۲$ داریم:

$$(m-۳)^۲-(m-۳)(m)+\frac{۳}{۴}m=۰\Rightarrow(m^۲-۶m+۹)-(m^۲-۳m)+\frac{۳}{۴}m=۰$$

$$\frac{-۹}{۴}m+۹=۰\Rightarrow m=۴$$

بنابراین اگر تاس ۴ بیاید، رابطه برقرار است و لذا با احتمال $\frac{۱}{۶}$ این اتفاق می‌افتد.

۱۱۴. گزینه ۱ درست است.

با ضرب طرفین معادله در عبارت $(x-۲)$ داریم:

$$(x-۱)(x-۲)=x-k^۲+۵\Rightarrow x^۲-۳x+۲=x-k^۲+۵\Rightarrow x^۲-۴x+k^۲-۳=۰$$

برای آنکه معادلهٔ اصلی یک ریشه داشته باشد، دو حالت زیر قابل تصور است:

حالت اول:

معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست آمده، یک ریشه داشته باشد. یعنی $\Delta=۰$ باشد، اما دقت کنید که در این حالت، تک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم، $x=\frac{-b}{۲a}=۲$ است که در دامنهٔ معادلهٔ اصلی قرار ندارد و غیرقابل قبول است.

حالت دوم:

معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست آمده، دو ریشهٔ متمایز $x=۲$ و $x=\alpha$ داشته باشد، $x=۲$ مانند حالت اول، غیرقابل قبول و $x=\alpha$ به‌عنوان تک ریشهٔ معادله اعلام شود. این حالت نیز منتفی است، چون:

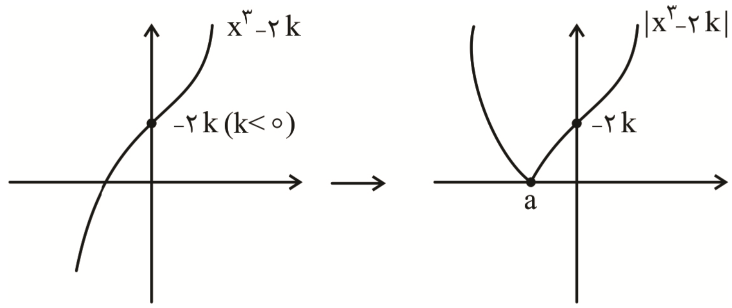
$$s=۴\Rightarrow\alpha+۲=۴\Rightarrow\alpha=۲$$

یعنی معادله، امکان داشتن دو ریشهٔ متمایز $x=۲$ و $x=\alpha$ را ندارد و در این حالت دارای ریشهٔ مضاعف $x=۲$ است.

پس هیچ مقداری برای k وجود ندارد.

۱۱۵. گزینه ۳ درست است.

به نمودار تابع $f(x)=|۲k-x^۳|=|x^۳-۲k|$ که $k<۰$ است، توجه کنید:



تابع در بازهٔ $(a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. برای پیدا کردن a داریم:

$$f(x)=۰\Rightarrow x^۳-۲k=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲k}$$

پس تابع در بازهٔ $(\sqrt[۳]{۲k},+\infty)$ اکیداً صعودی است و از مقایسهٔ آن با بازهٔ $(k,+\infty)$ در صورت سؤال داریم:

$$\sqrt[۳]{۲k}=k\Rightarrow ۲k=k^۳\Rightarrow k^۳-۲k=۰\Rightarrow k(k^۲-۲)=۰\Rightarrow k=۰,k=\pm\sqrt{۲}$$

چون $k<۰$ است، $k=-\sqrt{۲}$ قابل قبول است.

۱۱۶. گزینهٔ ۳ درست است.

ابتدا $f(\sqrt{۳})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۲+[x]\to f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲+[\sqrt{۳}]=۳+۱=۴$$

پس:

$$f\Big(a\underbrace{f(\sqrt{۳})}_{۴}\Big)=۲\to f(۴a)=۲$$

با جایگذاری گزینه‌ها به جای a، فقط گزینهٔ ۳ یعنی $a=\frac{-۱}{۲}$ در تساوی اخیر صدق می‌کند:

$$f(۴a)\xrightarrow{a=\frac{-۱}{۲}}f(-۲)=(-۲)^۲+[-۲]=۴-۲=۲$$

۱۱۷. گزینهٔ ۱ درست است.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$S=\log_۳^a+\log_۳^b=۴\Rightarrow\log_۳^{ab}=۴\Rightarrow ab=۳^۴=۸۱$$

$$p=\log_۳^a\times\log_۳^b=۱\Rightarrow\log_۳^a=\frac{۱}{\log_۳^b}\Rightarrow\log_۳^a=\log_b^۳$$

حاصل هر یک از عبارت‌های خواسته‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\log_۹^a}{\log_b^{\sqrt[۳]{۳}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\log_۳^a}{\frac{۱}{۳}\log_b^۳}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

$$ab=۸۱$$

$$\log_{ab}^a\log_{ab}^b=\frac{\log_۳^a}{\log_۳^{ab}}\frac{\log_۳^b}{\log_۳^{ab}}=\frac{\log_۳^a\log_۳^b}{(\log_۳ ab)^۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

نهایتاً حاصل کل عبارت خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

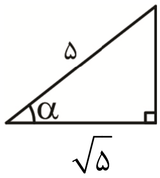
$$\frac{۳}{۲}-۸۱-۸(\frac{۱}{۱۶})=-۸۰$$

۱۱۸. گزینه ۱ درست است.

با استفاده از فرض سؤال داریم:

$$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{\text{حذف } ۲\pi}\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی داریم:



$$\text{فیثاغورس}: ۲\sqrt{۵}\ \to \sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

می‌دانیم که شیب هر خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. پس:

$$m_{f^{-۱}}=\tan ۲\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{۲\cos^۲\alpha-۱}=\frac{۲(\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})(\frac{\sqrt{۵}}{۵})}{۲(\frac{\sqrt{۵}}{۵})^۲-۱}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=\frac{-۴}{۳}$$

می‌دانیم دو تابع خطی که وارون هم هستند، شیب‌های برعکس هم دارند، پس $m_f=\frac{-۳}{۴}$ نهایتاً داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|\frac{-۳}{۴}x+h|}{\frac{-۴}{۳}x+h'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-۳}{۴}x+h}{\frac{-۴}{۳}x+h'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-۳}{۴}x}{\frac{-۴}{۳}x}=\frac{۹}{۱۶}$$

دقت کنید که در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to-\infty}|\frac{-۳}{۴}x+h|$، داخل قدرمطلق مثبت است و خود عبارت از قدرمطلق، بیرون آمده است.

۱۱۹. گزینه ۲ درست است.

زوایای ۲۵° و ۶۵° متمم هم هستند، پس $\tan ۶۵^\circ=\cot ۲۵^\circ$ بنابراین:

$$A-B=\frac{\cot ۲۵^\circ}{\tan ۵۰^\circ}-\frac{\cot ۲۵^\circ}{\sin ۵۰^\circ}=\cot ۲۵^\circ(\frac{۱}{\tan ۵۰^\circ}-\frac{۱}{\sin ۵۰^\circ})$$

$$\xrightarrow{\tan ۵۰^\circ=\frac{\sin ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ}}\cot ۲۵^\circ(\frac{\cos ۵۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}-\frac{۱}{\sin ۵۰^\circ})=\cot ۲۵^\circ(\frac{\cos ۵۰^\circ-۱}{\sin ۵۰^\circ})$$

با استفاده از روابط ۲α داریم:

$$\begin{cases}\sin ۵۰^\circ=۲\sin ۲۵^\circ\cos ۲۵^\circ\\ \cos ۵۰^\circ=۱-۲\sin^۲ ۲۵^\circ\end{cases}$$

پس داریم:

$$\cot ۲۵^\circ(\frac{\cos ۵۰^\circ-۱}{\sin ۵۰^\circ})=\frac{\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}(\frac{۱-۲\sin^۲ ۲۵^\circ-۱}{۲\sin ۲۵^\circ\cos ۲۵^\circ})=\frac{\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ}(\frac{-\sin^۲ ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ\cos ۲۵^\circ})=-۱$$

۱۲۰. گزینه ۱ درست است.

عرض از مبدأ خط $y=۲x-۳$ برابر با -۳ و طول از مبدأ آن $\frac{۳}{۲}$ است. با توجه به نمودار تابع، دوره تناوب تابع f برابر با $\frac{۳}{۲}$ و مقدار min آن برابر با -۳ است.

$$f(x)=a\sin\left(\pi(bx+\frac{۱}{۲})\right)+۲=a\sin(\pi bx+\frac{\pi}{۲})+۲=a\cos(\pi bx)+۲$$

اولاً: $T=\frac{۲\pi}{|\pi b|}=\frac{۲}{|b|}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow |b|=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \boxed{b=\pm\frac{۴}{۳}}$

ثانیاً: $\begin{cases}\frac{\max+\min}{۲}=۲\Rightarrow\frac{\max-۳}{۲}=۲\Rightarrow\max=۷\\ \frac{\max-\min}{۲}=|a|\Rightarrow|a|=\frac{۷-(-۳)}{۲}=۵\Rightarrow a=\pm۵\end{cases}$

با توجه به اینکه تابع، از نوع کسینوسی و در $x=۰$ صعودی است، $\boxed{a=-۵}$ قابل قبول است و در پایان:

$$۲a+۳b=\begin{cases}۲(-۵)+۳(\frac{۴}{۳})=-۶\\ ۲(-۵)+۳(\frac{-۴}{۳})=-۱۴\end{cases}$$

چون کمترین مقدار $۲a+۳b$ مدنظر است، مقدار -۱۴ را انتخاب می‌کنیم.

۱۲۱. گزینه ۳ درست است.

دو طرف معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

در سمت چپ معادله می‌دانیم:

$$\frac{\sin\frac{x}{۲}}{۱+\cos\frac{x}{۲}}=\frac{۱-\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

در سمت راست معادله می‌دانیم:

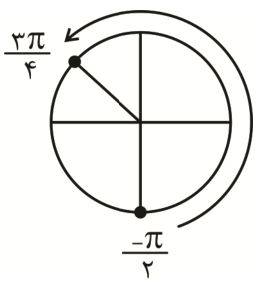
$$\frac{۱}{\sin\frac{x}{۲}}+\cot\frac{x}{۲}=\frac{۱}{\sin\frac{x}{۲}}+\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{۱+\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

پس معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱-\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{۱+\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}\Rightarrow ۱-\cos\frac{x}{۲}=۱+\cos\frac{x}{۲}\Rightarrow\cos\frac{x}{۲}=۰$$

$$-\pi\le x\le\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\frac{-\pi}{۲}\le\frac{x}{۲}\le\frac{۳\pi}{۴}\rightarrow$$

$$\cos\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=\begin{cases}-\frac{\pi}{۲}\\ \frac{\pi}{۲}\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}-\pi\\ \pi\end{cases}$$



پس قدرمطلق تفاضل جواب‌ها برابر با ۲π است.

۱۲۲. گزینه ۱ درست است.

ابتدا تابع $f^{-۱}$ را کمی ساده می‌کنیم تا وارون آن یعنی تابع f را راحت‌تر به‌دست آوریم:

$$f^{-۱}(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۷=(x-۲)^۳+۱\xrightarrow{\text{وارون}}f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}+۲$$

پس حد موردنظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{\left((x-۲)^۳+۱\right)-۳(\sqrt[۳]{x-۱}+۲)+۸}{|x^۲+x+[\frac{-۵}{۲}x]|}$$

ابتدا تکلیف براکت را روشن می‌کنیم:

$$\left[\frac{-۵}{۲}(۲^+)\right]=[-۵(۱^+)]=[(-۵^-)]=-۶$$

حالا تکلیف قدرمطلق را معلوم می‌کنیم:

$$|x^۲+x-۶|=|(x-۲)(x+۳)|\xrightarrow{x=۲^+}=(x-۲)(x+۳)=x^۲+x-۶$$

پس با حد زیر مواجه‌ایم:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{(x-۲)^۳-۳\sqrt[۳]{x-۱}+۳}{x^۲+x-۶}=\frac{۰}{۰}$$

از طریق حذف عامل صفرشونده $(x-۲)$ یا از روش هوپیتال عمل می‌کنیم:

$$\text{هوپیتال}: \lim_{x\to ۲} \frac{۳(x-۲)^۲-۳(\frac{۱}{۳})(x-۱)^{\frac{-۲}{۳}}}{۲x+۱}=\frac{-۱}{۵}$$

۱۲۳. گزینه ۳ درست است.

اگر $n<۱$ باشد داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{ax^n+|x|+۱}{bx^n+|x-۲|}=\lim_{x\to +\infty} \frac{|x|}{|x-۲|}=\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-۲}=\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x}=\boxed{۱}$$

اگر $n>۱$ باشد:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{ax^n+|x|+۱}{bx^n+|x-۲|}=\lim_{x\to +\infty} \frac{ax^n}{bx^n}=\boxed{\frac{a}{b}}$$

اگر $n=۱$ باشد:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{ax^n+|x|+۱}{bx^n+|x-۲|}=\lim_{x\to +\infty} \frac{ax+x+۱}{bx+x-۲}\simeq\lim_{x\to +\infty} \frac{(a+۱)x}{(b+۱)x}=\boxed{\frac{a+۱}{b+۱}}$$

پس حاصل حد نمی‌تواند برابر با $\frac{a-۱}{b-۱}$ باشد.

۱۲۴. گزینه ۱ درست است.

اعداد صحیح، داخل براکت را صحیح کرده و تابع f در تمام آن‌ها ناپیوسته است، فقط $x=۲$ به‌دلیل ایجاد عامل صفرکننده در پشت براکت، تنها نقطهٔ صحیح است که تابع f در آن پیوسته است. پس $b=۲$ می‌باشد و باید وضعیت پیوستگی تابع $g(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]+[-x]$ را در $x=۲$ بررسی کنیم:

$$g(۲)=[۱]+[-۲]=۱-۲=-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} g(x)=\left[۱^+\right]+\left[(-۲)^-\right]=۱-۳=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x)=\left[۱^-\right]+\left[(-۲)^+\right]=۰-۲=-۲$$

بنابراین تابع در $x=۲$ حد دارد، ولی پیوسته نیست.

۱۲۵. گزینه ۳ درست است.

مشتق تابع داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$y' = \left((x^2-1)f(\frac{x+1}{x-1})\right)' = 2xf(\frac{x+1}{x-1}) + \frac{-2}{(x-1)^2}f'(\frac{x+1}{x-1})(x^2-1)$$

با جایگذاری $x=3$ داریم:

$$y' = 6f(2) - 4f'(2)$$

با توجه به نمودار تابع f، $f(2)=2$ است و $f'(2)$ یا همان شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ $x=2$، همان شیب خط واصل بین نقاط به طول $x=1$ و $x=2$ واقع بر منحنی f است:

$$f'(2) = \frac{3-2}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

بنابراین داریم:

$$6f(2) - 4f'(2) = 6(2) - 4(-1) = 16$$

۱۲۶. گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم که تابع قدرمطلق، در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق که در اینجا $x=1$ است، مشتق‌ناپذیر می‌باشد:

$$x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ریشه مضاعف} \\ x=1 & \text{ریشه ساده} \end{cases}$$

پس $m=1$ می‌باشد و:

$$n = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2f(x) - (1^2)f(1)}{x-1}$$

حاصل حد اخیر برابر با مشتق چپ تابع $y = x^2f(x)$ در $x=1$ می‌باشد:

$$y = x^2|x^3-x^2| = x^2|x^2(x-1)| = x^4|x-1| \xrightarrow{x\to 1^-} x^4(-x+1) = -x^5 + x^4$$

$$y' = -5x^4 + 4x^3 \xrightarrow{x=1} \boxed{n=-1}$$

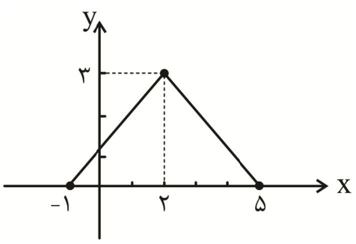
نهایتاً آهنگ متوسط تغییر تابع $g(x) = x^2 - 5x + \frac{3}{2}$ در بازهٔ $[1,3]$ را می‌خواهیم که چون این تابع از درجهٔ دوم است، برابر با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در وسط بازه یعنی $x=2$ می‌باشد.

۱۲۷. گزینه ۲ درست است.

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{-x^2+4x+5}\ ;\ D_f = [-1,5]\ ; f'(2) = 0$$

پس نقاط بحرانی $(-1,0)$ ، $(5,0)$ و $(2,3)$ هستند.



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\times 6 \times 3 = 9$$

$$\text{فاصلهٔ } (-1,0) \text{ تا } (5,0) = 6$$

$$\text{فاصلهٔ } (-1,0) \text{ تا } (2,3) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-0)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{فاصلهٔ } (2,3) \text{ تا } (5,0) = \sqrt{(5-2)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{محیط مثلث} = 6 + 6\sqrt{2} = 6(\sqrt{2}+1)$$

اکنون نسبت مساحت به محیط را می‌یابیم:

$$\frac{\text{مساحت}}{\text{محیط}}=\frac{9}{6(\sqrt{2}+1)}=\frac{3}{2(\sqrt{2}+1)}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$$

۱۲۸. گزینه ۴ درست است.

محل تقاطع تابع f با نیمساز $y=x$ برابر $x=0$ و $x=1$ است، پس $0<x<1$ است. مختصات نقطه A به‌صورت (x,x^2) و درنتیجه A' به‌صورت (x^2,x) است.

$$|AA'|=\sqrt{(x^2-x)^2+(x-x^2)^2}=\sqrt{2}|x-x^2|\xrightarrow{0<x<1}|AA'|=\sqrt{2}(x-x^2)$$

اکنون ماکزیمم تابع $y=\sqrt{2}(x-x^2)$ را می‌یابیم:

$$y'=\sqrt{2}(1-2x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\qquad y_{max}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

از طرفی دیگر، مختصات نقطه B به‌صورت (x,x^3) و درنتیجه B' به‌صورت (x^3,x) است.

$$|BB'|=\sqrt{(x^3-x)^2+(x-x^3)^2}=\sqrt{2}|x-x^3|\xrightarrow{0<x<1}|BB'|=\sqrt{2}(x-x^3)$$

حالا ماکزیمم تابع $y=\sqrt{2}(x-x^3)$ را مشخص می‌کنیم:

$$y'=\sqrt{2}(1-3x^2)=0\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\xrightarrow{0<x<1}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y_{max}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

درنتیجه اختلاف ماکزیمم‌ها برابر است با:

$$\frac{2\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{8\sqrt{6}-9\sqrt{2}}{36}=\frac{(8\sqrt{3}-9)\sqrt{2}}{36}$$

۱۲۹. گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم $CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}$ و در هر چهار دادهٔ فرد متوالی داریم:

$$k,k+2,k+4,k+6\Rightarrow\overline{X}=k+3,\sigma=\sqrt{5}$$

یعنی میزان پراکندگی داده‌ها و درنتیجه مقادیر واریانس و انحراف معیار، همواره مقداری ثابت است. پس برای آنکه CV ماکزیمم شود، لازم است که $\overline{X}$ مینیمم شود و برای این منظور، کوچک‌ترین چهار عدد فرد متوالی سه‌رقمی را انتخاب می‌کنیم:

$$101,103,105,107\Rightarrow\overline{X}=104,\sigma=\sqrt{5}$$

$$CV=\frac{\sqrt{5}}{104}\simeq\frac{2/2}{104}=\frac{22}{1040}=\frac{11}{520}\simeq\frac{11}{500}=0/022$$

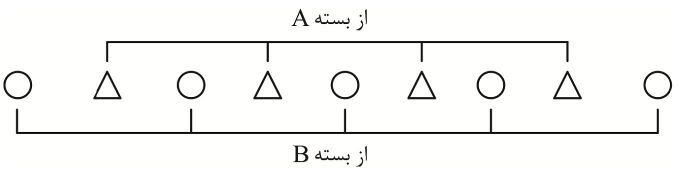
۱۳۰. گزینه ۲ درست است.

بسته‌های A و B به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

بستهٔ A: شامل حروف L، L، E، E ← ۴ حرف

بستهٔ B: شامل حروف A، H، G، T، S ← ۵ حرف

برای آنکه حروف بستهٔ A با حروف بستهٔ B به‌صورت یکی در میان باشد، با حروف بسته B شروع کرده و به‌صورت زیر، چیدمان را انجام می‌دهیم:



از آنجا که با حذف حروف بسته B ، قرار است که هیچ دو حرف یکسانی کنارهم نباشند، حروف بستهٔ A باید در میان خودشان نیز به‌صورت یکی در میان باشند، پس یکی از دو حالت کلی زیر مدنظر است:

○ △E ○ △L ○ △E ○ △L ○

○ △L ○ △E ○ △L ○ △E ○

واضح است که در هر کدام از این دو حالت، حروف بستهٔ B به !۵ حالت جابه‌جا می‌شوند و جواب نهایی برابر است با:

$۲\times ۵!=۲\times ۱۲۰=۲۴۰$

۱۳۱. گزینه ۳ درست است.

فضای نمونه‌ای پرتاب سه‌تاس، $۶^۳=۲۱۶$ حالت دارد که در نیمی از این حالت‌ها، مجموع، عددی فرد می‌شود. پس:

$n(s)=۱۰۸$

وقتی مجموع سه تاس، فرد است، یکی از اعداد ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵ و ۱۷ می‌باشد که تمـام آن‌هـا در بـازهٔ $[۴,۱۴]$ قـرار دارند، به‌جز مجموع‌های ۳، ۱۵ و ۱۷ پس احتمال مورد‌نظر برابر است با:

$$۱-\left[P(\underbrace{\text{مجموع سه تاس}=۳}_{\text{یک حالت}})+P(\underbrace{\text{مجموع سه تاس}=۱۵}_{\text{ده حالت}})+P(\underbrace{\text{مجموع سه تاس}=۱۷}_{\text{سه حالت}})\right]$$

(۱ و ۱ و ۱)   (بررسی کنید!)   (۵ و ۶ و ۶) (۶ و ۵ و ۶) (۶ و ۶ و ۵)

$$=۱-\left(\frac{۱+۱۰+۳}{۱۰۸}\right)=۱-\frac{۱۴}{۱۰۸}=۱-\frac{۷}{۵۴}=\frac{۴۷}{۵۴}$$

۱۳۲. گزینه ۴ درست است.

مهرهٔ اول که بدون رؤیت از جعبهٔ A خارج شده، تأثیری در فضای نمونه‌ای مسئله ندارد و مهم نیست. در مورد مهرهٔ دوم کـه از جعبهٔ A خارج شده، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول:

مهرهٔ خارج شده از A سفید باشد ← احتمال: $\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹}$

- دو مهرهٔ سیاه به جعبهٔ A اضافه می‌کنیم:

A
۵ W
۵ B

- یک مهره از جعبهٔ A (سفید یا سیاه) خارج کرده و در جعبهٔ B قرار می‌دهیم و سپس از جعبهٔ B مهرهٔ سفید خارج می‌کنیم:

A	B
۵ W	۴ W
۵ B	۵ B

احتمال سفید از جعبهٔ B: $\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{سفید از جعبهٔ اول}}\times\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{سفید از جعبهٔ دوم}}+\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{سیاه از جعبهٔ اول}}\times\underbrace{\frac{۴}{۱۰}}_{\text{سفید از جعبهٔ دوم}}=۰/۴۵$

پس احتمال کل در حالت اول برابر است با:

$$\frac{۲}{۳}\times ۰/۴۵=\boxed{۰/۳}$$

حالت دوم:

- مهرهٔ خارج شده از A سیاه باشد ← احتمال: $\frac{۱}{۳}=\frac{۳}{۹}$

- دو مهرهٔ سفید به ظرف A اضافه می‌کنیم:

A
۸ W
۲ B

یک مهره از جعبهٔ A (سفید یا سیاه) خارج کرده و در جعبهٔ B قرار می‌دهیم و سپس از جعبهٔ B مهرهٔ سفید خارج می‌کنیم:

A	B
۸ W	۴ W
۲ B	۵ B

احتمال سفید از جعبهٔ B: $\underbrace{\frac{۸}{۱۰}}_{\text{سفید از جعبهٔ اول}}\times\underbrace{\frac{۵}{۱۰}}_{\text{سفید از جعبهٔ دوم}}+\underbrace{\frac{۲}{۱۰}}_{\text{سیاه از جعبهٔ اول}}\times\underbrace{\frac{۴}{۱۰}}_{\text{سفید از جعبهٔ دوم}}=۰/۴۸$

پس احتمال کل در حالت دوم برابر است با:

$$\frac{۱}{۳}\times ۰/۴۸=\boxed{۰/۱۶}$$

جواب نهایی برابر است با:

$$۰/۳+۰/۱۶=۰/۴۶$$

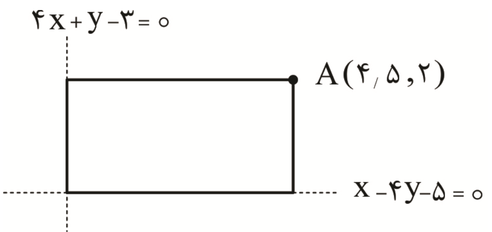
۱۳۳. گزینه ۳ درست است.

با جایگذاری دو مقدار دلخواه به‌جای m و به‌دست آوردن معادلهٔ دو تا از این خطوط و سپس حل آن‌ها در یک دستگاه، مختصات نقطهٔ ثابتی که این خطوط از آن‌ها می‌گذرند (در اینجا همان رأس مستطیل) را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m=\frac{-۱}{۲}\rightarrow \frac{۷}{۲}y=۷\Rightarrow y=۲ \\ m=\frac{-۱}{۹}\rightarrow \frac{۱۴}{۹}x=۷\Rightarrow x=\frac{۹}{۲}=۴/۵ \end{cases}\rightarrow A(۴/۵,۲)$$

دقت کنید که مختصات این نقطه، در هیچ‌کدام از معادلات اضلاع داده‌شده، صدق نمی‌کند.

پس داریم:

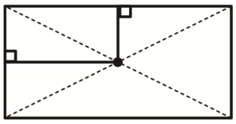


واضح است که فاصلهٔ نقطه A تا هریک از این خطوط، برابر با طول و عرض مستطیل است:

فاصلهٔ نقطه $A(۴/۵,۲)$ از خط $۴x+y-۳=۰$: $\frac{|۴(۴/۵)+۲-۳|}{\sqrt{۴^۲+۱^۲}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۱۷}}=\sqrt{۱۷}$

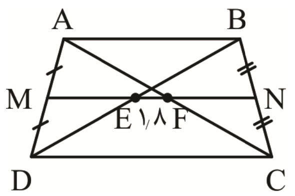
فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴/۵,۲)$ از خط $x-۴y-۵=۰$: $\frac{|۴/۵-۴(۲)-۵|}{\sqrt{۱^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۸/۵}{\sqrt{۱۷}}=\frac{\frac{۱۷}{۲}}{\sqrt{۱۷}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۷}$

در پایان، فاصلهٔ محل تلاقی قطرهای مستطیل تا اضلاع را می‌خواهیم که برابر با نصف طول و نصف عرض مستطیل است که در اینجا به ترتیب برابر با $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۷})$ و $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۷})$ است و چون مقدار کمتر مدنظر است، $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$ قابل قبول است که $\frac{۱}{۴}$ برابر $\sqrt{۱۷}$ می‌باشد.



۱۳۴. گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم در یک ذوزنقه، اگر قطرها و پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به‌هم وصل می‌کند، رسم شوند، از قضیهٔ تالس داریم:



$$\begin{cases} MN=\frac{CD+AB}{۲} \\ EF=\frac{CD-AB}{۲} \end{cases}$$

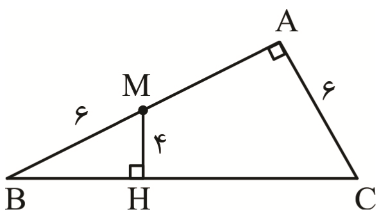
پس در اینجا داریم:

$$\frac{CD-AB}{۲}=۱/۸ \Rightarrow CD-AB=۳/۶ \xrightarrow{CD=۴AB} ۴AB-AB=۳/۶ \Rightarrow AB=۱/۲ \Rightarrow CD=۴/۸$$

نهایتاً داریم:

$$S=\frac{(CD+AB)\times \text{ارتفاع}}{۲}=\frac{(۴/۸+۱/۲)\times ۶}{۲}=۱۸$$

۱۳۵. گزینه ۲ درست است.



دو مثلث ABC و MBH به حالت دو زاویهٔ برابر، متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{MH}{AC}=\frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{۶}=\frac{۶}{BC} \Rightarrow BC=۹$$

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر برابر با نصف وتر یعنی $۴/۵$ است.

۱۳۶. گزینه ۳ درست است.

برای محاسبهٔ رادیکال‌های صورت کسر A داریم:

$$\begin{cases} \sqrt{۸}=۲\sqrt{۲} \\ \sqrt{۴/۵}=\sqrt{\frac{۹}{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}} \\ \sqrt{۱۲/۵}=\sqrt{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

$$\text{صورت کسر } A=۲\sqrt{۲}+\frac{۳}{\sqrt{۲}}-\frac{۵}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}-\frac{۲}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}-\left(\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}\right)=\sqrt{۲}$$

برای محاسبهٔ مخرج کسر A، (که قطعاً عددی منفی است) از طریق به توان دو رساندن داریم:

$$B=\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$B^{۲}=(\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}})^{۲}=(۳-\sqrt{۵})+(۳+\sqrt{۵})-۲\sqrt{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}$$
$$=۶-۲(۲)=۲\Rightarrow B=\pm\sqrt{۲}\xrightarrow{B<۰}B=-\sqrt{۲}$$

پس حاصل کسر A برابر است با:

$$A=\frac{\sqrt{۲}}{-\sqrt{۲}}=-۱$$

در پایان داریم:

$$\frac{-A}{۳-۲\sqrt{۲}}-۳=\frac{-(-۱)}{۳-۲\sqrt{۲}}-۳=\frac{۱}{۳-۲\sqrt{۲}}-۳\xrightarrow[\text{در مزدوج مخرج}]{\text{ضرب صورت کسر}}$$
$$=\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{(۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})}-۳=(۳+۲\sqrt{۲})-۳=۲\sqrt{۲}$$

۱۳۷. گزینه ۲ درست است.

می‌دانیم:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$

از مقایسهٔ این تساوی با $n(B-A)=n(B)-n(A)$، نتیجه می‌گیریم:

$$n(A\cap B)=n(A)\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$$

پس:

$$n(A\cup B)=۴n(A)-۲\xrightarrow{A\cup B=B}n(B)=۴n(A)-۲$$

از طرفی $n(B)-n(A)=۱۳$، از حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases}n(B)=۴n(A)-۲\\ n(B)-n(A)=۱۳\end{cases}\rightarrow\begin{cases}n(A)=۵\\ n(B)=۱۸\end{cases}$$

در پایان:

$$n(A\cap B)=n(A)=۵$$

۱۳۸. گزینه ۳ درست است.

چون ab، ac و bc سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی هستند، داریم:

$$(ac)^{۲}=(ab)(bc)\Rightarrow a^{۲}c^{۲}=ab^{۲}c\Rightarrow ac=b^{۲}$$

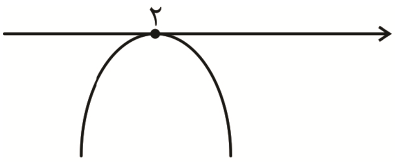
با توجه به تساوی اخیر، پس a و b و c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. از طرفی a و b و c مطابق صورت سؤال، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی هم می‌دهند و تنها دنباله‌ای که هم حسابی است و هم هندسی، دنبالهٔ ثابت است. پس $a=b=c$ و لذا مثلث مورد نظر، متساوی‌الاضلاع است و محل تلاقی ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازها همگی بر هم منطبق‌اند.

۱۳۹. گزینه ۱ درست است.

شرط اول تساوی توابع، برابری دامنه‌هاست:

$$D_f:\begin{cases}۲-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲\\ \dfrac{x-۲}{۴-x}\geq ۰\Rightarrow ۲\leq x<۴\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_f=\{۲\}$$

پس باید دامنهٔ g نیز فقط شامل تک عضو $x=۲$ باشد، یعنی عبارت درجهٔ دوم $y=-۲x^{۲}-۲ax+b$ فقط به ازای $x=۲$، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. برای این منظور لازم است:



$\longrightarrow y=-۲x^{۲}-۲ax+b=-۲(x-۲)^{۲}$

$y=-۲x^{۲}-۲ax+b$

$$\Rightarrow -۲x^{۲}-۲ax+b=-۲x^{۲}+۸x-۸ \to \begin{cases} a=-۴ \\ b=-۸ \end{cases}$$

شرط دوم، برابری خروجی‌ها به‌ازای دامنهٔ مشترک (در اینجا $x=۲$) است:

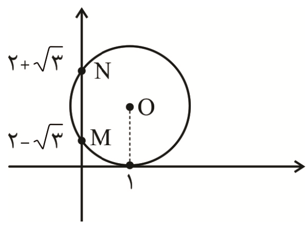
$$\begin{cases} f(۲)=۰ \\ g(۲)=c \end{cases} \to c=۰ \Rightarrow a+b+c=(-۴)+(-۸)+(۰)=-۱۲$$

۱۴۰. گزینه ۲ درست است.

ابتدا نقاط تلاقی دایره به معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۲x-۴y+۱=۰$ با محور yها را به‌دست می‌آوریم:

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x-۴y+۱=۰ \xrightarrow{x=۰} y^{۲}-۴y+۱=۰ \Rightarrow y=\frac{۴\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$$

پس شعاع دایره‌ای را می‌خواهیم که از نقاط $M(۰,۲+\sqrt{۳})$ و $N(۰,۲-\sqrt{۳})$ گذشته و بر محور xها در نقطهٔ $x=۱$ مماس باشد:



مختصات مرکز دایره را برابر با $O(۱,\beta)$ در نظر گرفته و فاصلهٔ آن تا نقاط M و N را که هر دو برابر با شعاع دایره است، با هم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{۱^{۲}+\left(\beta-(۲+\sqrt{۳})\right)^{۲}}=\sqrt{۱^{۲}+\left(\beta-(۲-\sqrt{۳})\right)^{۲}} \Rightarrow \left(\beta-(۲+\sqrt{۳})\right)^{۲}=\left(\beta-(۲-\sqrt{۳})\right)^{۲}$$

$$\Rightarrow |\beta-(۲+\sqrt{۳})|=|\beta-(۲-\sqrt{۳})|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta-(۲+\sqrt{۳})=\beta-(۲-\sqrt{۳}) & \text{غ ق ق} \\ \beta-(۲+\sqrt{۳})=-\beta+(۲-\sqrt{۳}) & \Rightarrow ۲\beta=۴ \Rightarrow \beta=۲ \end{cases}$$

نهایتاً برای محاسبهٔ شعاع دایره، کافی است فاصلهٔ مرکز دایره $O(۱,۲)$ را از یکی از نقاط M و N به‌دست آوریم:

$$O(۱,۲) \qquad M(۰,۲+\sqrt{۳})$$

$$R=\sqrt{۱^{۲}+(\sqrt{۳})^{۲}}=۲$$

۱۱۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲+۷x+۲=۰$ باشد. حاصل عبارت $\dfrac{\alpha^۳\beta+\beta^۳\alpha}{(\alpha^۲+۸\alpha+۱)(\beta^۲+۸\beta+۱)}$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۱۲- در تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x+a$ اگر $(f+f^{-۱})(-۱)=-۲$ باشد مجموع مقادیر قابل برای a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) -۲

۱۱۳- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\dfrac{۱}{۲}=\dfrac{۱}{x+۱}+\dfrac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) -۲

۱۱۴- نامعادله $\dfrac{(۹x^۲+(۲m+۳)x+m^۲)(-x^۲-x-۱)}{-(x^۴+۱)(|x|+۱)}>۰$ به‌ازای $m\in\mathbb{R}-[a,b]$ همواره برقرار است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{۹}{۸}$ ۳) $\dfrac{۱۱}{۸}$ ۴) $\dfrac{۱۳}{۸}$

۱۱۵- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{(x-۲)^۲}-\sqrt[۳]{(x+۱)^۳}$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۳)$ ۴) $(۰,۴)$

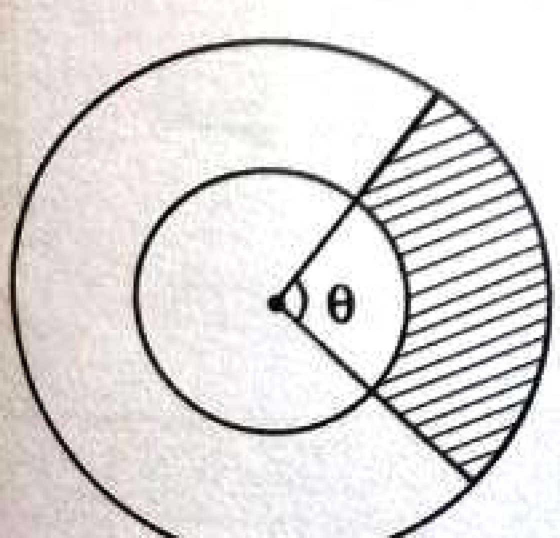
۱۱۶- اگر $(۰/۰۴)^a=۲\sqrt[۸]{۳۲}$ ، $(\frac{۱}{۲})^b=۲۵$ باشد، آنگاه حاصل $\log_{\frac{۲۶}{۴۹}}^{۱۱۲ab}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\dfrac{۱}{۴}$

۱۱۷- اگر تابع $f(x)=\dfrac{(a+۲)x^۲+۳x+۲c-۱}{ax^۲+x+۴}$ برای هر x حقیقی به تابع ثابت $y=k$ تبدیل شود، حاصل $\dfrac{-۲a}{-۳a+۲c}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۱۰}$ ۲) $\dfrac{۲}{۱۰}$ ۳) $\dfrac{-۲}{۱۰}$ ۴) $\dfrac{-۱}{۱۰}$

۱۱۸- در شکل داده‌شده مساحت دایرهٔ بزرگ ۹ برابر مساحت دایرهٔ کوچک هم مرکز است، اگر محیط قسمت رنگی ۳ برابر محیط دایره کوچک‌تر باشد، زاویهٔ θ تقریباً چند درجه است؟



۱) ۲۰۵°

۲) ۲۱۲°

۳) ۲۲۰°

۴) ۲۲۴°

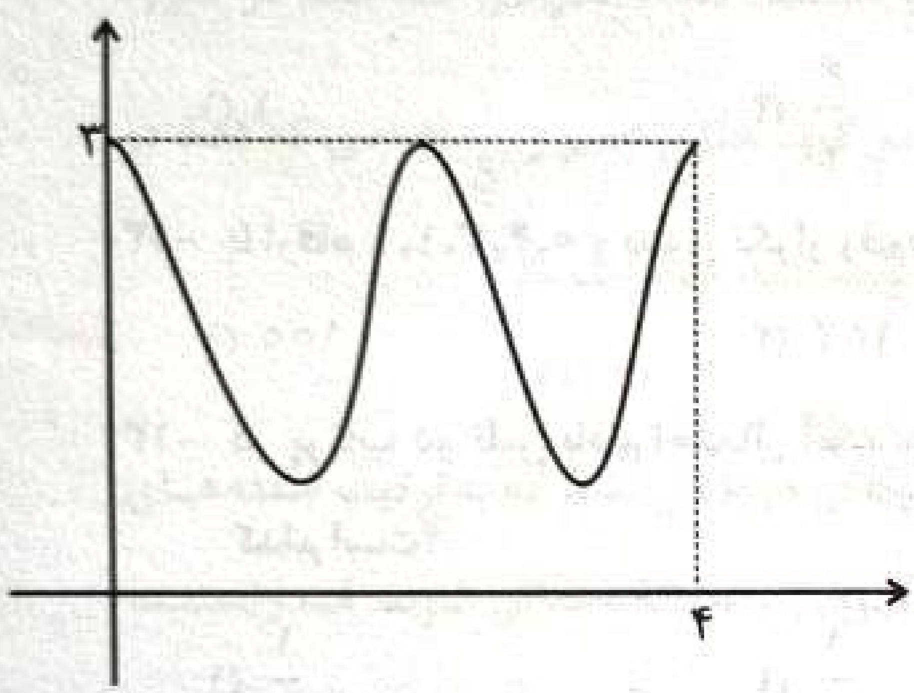
۱۱۹- اگر حاصل $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha+\pi)-\cos(\alpha-\pi)}$ برابر ۴ باشد مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۲۰- تعداد جواب‌های معادله $(1+\cos x)(1+\cos\frac{x}{2})=\frac{1}{4}$ در بازه $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۱- شکل زیر نمودار تابع $y=a+\sin(\frac{\pi}{2}+b\pi x)$ می‌باشد $a+b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۱ یا ۳
۴) ۳-

۱۲۲- حاصل حد $\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$ وقتی x به یک میل می‌کند کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۲۳- اگر $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-5x+6}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty} fof(x)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۲ ۴) ۱۵

۱۲۴- کدام تابع زیر در $x=1$ فقط از سمت چپ پیوسته است؟

۱) $y=[\cos\pi x]$ ۲) $y=\left[-\frac{1}{x}\right]$ ۳) $y=\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]$ ۴) $y=\left[x^3+x\right]$

۱۲۵- فرض کنید $f(x+1)=x^3+3x^2+3x-1$ باشد شیب خط مماس بر تابع $g(x)=f^{-1}(x)+f(x+1)-x$ در نقطه‌ای به طول $x=-1$ واقع بر نمودار g، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{-8}{3}$

۱۲۶- تابع $f(x)=(x-2)|x^2-4x|$ در نقطه‌ای به طول مثبت مشتق‌ناپذیر است. مقدار مشتق راست تابع در آن نقطه کدام است؟

۱) ۸- ۲) ۴ ۳) ۴- ۴) ۸

۱۲۷- مجموع اکسترمم‌های نسبی تابع $y=\frac{x^۲+۲}{x+۱}$ کدام است؟

۱) ۱-   ۲) ۲-   ۳) ۳-   ۴) ۴-

۱۲۸- از نقطه واقع در ربع اول و روی خط $y=\frac{۱۰-x}{۲}$ دو خط عمود بر محورهای مختصات وارد می‌کنیم. ماکزیمم مساحت چهارضلعی پدید آمده کدام است؟

۱) ۱۲/۵   ۲) ۱۳/۵   ۳) ۱۲   ۴) ۱۱/۵

۱۲۹- در داده‌های آماری ۷,۹,۹,۱۰,۱۲,۱۲,۱۲,۱۴,۱۷,۱۷,۲۰,۲۱,۲۵,۲۸ اگر داده‌های بیشتر از چارک سوم و کمتر از چارک اول را حذف کنیم، میانه و میانگین داده‌های باقی‌مانده چقدر اختلاف دارند؟

۱) ۱   ۲) $\frac{۶}{۷}$ ۳) $\frac{۸}{۷}$ ۴) $\frac{۹}{۷}$

۱۳۰- با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴ و بدون تکرار رقم‌ها، چند عدد طبیعی زوج می‌توان ساخت؟

۱) ۱۰۰   ۲) ۱۰۲   ۳) ۱۶۲   ۴) ۱۶۰

۱۳۱- در پرتاب دو تاس باهم احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده حداکثر برابر ۷ و تفاضل اعداد رو شده حداقل ۲ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

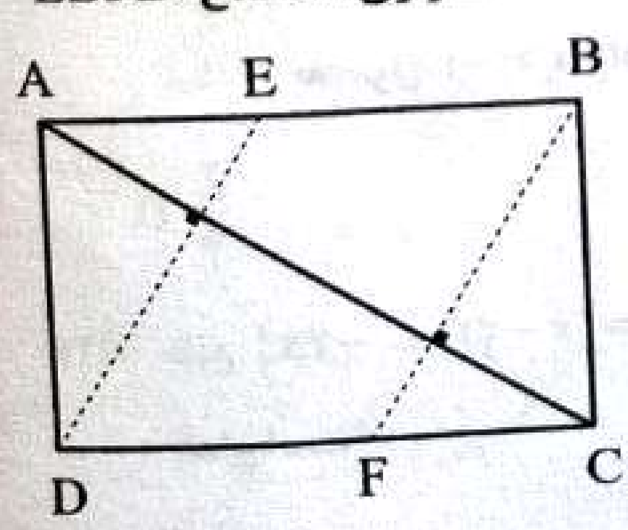
۱۳۲- در کیسهٔ A شش مُهره و در کیسهٔ B پنج مهره داریم، دو تا از مهره‌های هر کیسه سفید هستند. یک مهره از کیسهٔ B بیرون می‌آوریم و در کیسهٔ A می‌اندازیم. حال از کیسهٔ A مهره‌ای بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال سفید است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳۵}$

۱۳۳- خط به معادله $(m-۱)x+(m+۴)y=۴$ به‌ازای هر مقدار m از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. فاصلهٔ آن نقطه ثابت، از خط به معادله $L:۳x+۳y=۷$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۶}$ ۳) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۶}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۶}$

۱۳۴- در مستطیل ABCD به اضلاع ۳,۴ از دو رأس مقابل بر قطر عمود می‌کنیم. مساحت متوازی‌الاضلاع EBFD ایجادشده تقریباً چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث است؟



۱) ۷
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۴

۱۳۵- در ذوزنقه‌ای طول قاعده‌ها ۱ و ۷ است. پاره‌خطی موازی قاعده‌ها سطح این ذوزنقه را به دو قسمت هم مساحت تقسیم می‌کند. نسبت قطعه‌های ایجادشده روی هر ساق کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۳۶- مقدار $x^۳ + x^۲ + \frac{x}{۳} + ۱$ به‌ازای $x = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۱۶} + \sqrt[۳]{۴} + ۱}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۳۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۹}$ ۴) $\frac{۲۹}{۲۷}$

۱۳۷- همه افراد یک کلاس ۴۸ نفره یا در گروه ورزشی یا در گروه هنری عضو هستند. تعداد افرادی که هم در گروه ورزشی و هم در گروه هنری عضواند نصف تعداد افرادی است که فقط در گروه هنری عضو و $\frac{۱}{۵}$ افرادی که فقط در گروه ورزشی عضو می‌باشند. تعداد افرادی که فقط در گروه ورزشی عضو هستند کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۳۸

۱۳۸- بین جمله‌های چهارم و پنجم از دنبالهٔ هندسی غیرثابت، سه عدد به گونه‌ای درج می‌کنیم که به‌ترتیب جمله‌های سوم، چهارم، سه عدد جدید و جملهٔ پنجم دنبالهٔ هندسی شش جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی شوند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) ۴

۱۳۹- دو تابع $f(x) = \sqrt{(a^۲ - ۲)x^۲ + bx}$ و $g(x) = \sqrt{ax}\sqrt{x+۴}$ با هم مساوی‌اند. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

۱۴۰- دو دایره از نقطهٔ $(۳-,۱)$ می‌گذرند و هر کدام با کمترین شعاع بر یکی از محورهای مختصات مماس هستند. بیشترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چقدر است؟

۱) $۲ + \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$ ۲) $۲ + \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۳) $۳ + \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۴) $۳ + \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

ریاضی

۱۱۱. گزینه ۴ درست است.

$x^2+7x+2=0 \to S=\alpha+\beta=-7$ ، $p=\alpha\times\beta=2$ ، $x^2=-7x-2$

$$\frac{\alpha^3\beta+\beta^3\alpha}{(\alpha^2+8\alpha+1)(\beta^2+8\beta+1)}=\frac{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{(-7\alpha-2+8\alpha+1)(-7\beta-2+8\beta+1)}=\frac{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$

$$\frac{2\times(49-4)}{2-(-7)+1}=\frac{90}{10}=9$$

۱۱۲. گزینه ۳ درست است.

تابع $f(x)$ را به‌صورت:

$$f(x)=x^3+3x^2+3x+1-1+a$$

$$f(x)=(x+1)^3+a-1 \quad , \quad (f+f^{-1})(-1)=f(-1)+f^{-1}(-1)$$

$$\begin{cases} f(-1)=a-1 \\ f^{-1}(-1) \Rightarrow \cancel{-1}=(x+1)^3+a-\cancel{1} \to (x+1)^3=-a \qquad x+1=\sqrt[3]{-a} \qquad x=\sqrt[3]{-a}-1 \end{cases}$$

$$\underset{\downarrow}{f(-1)}+\underset{\downarrow}{f^{-1}(-1)}=2$$

$$a-\cancel{1}+\sqrt[3]{-a}-\cancel{1}=-\cancel{2}$$

$$a+\sqrt[3]{-a}=0 \to \sqrt[3]{-a}=-a \xrightarrow{\text{توان}} 3$$

$\cancel{-}a=\cancel{-}a^3 \to a-a^3=0 \to a(1-a^2)=0 \to a=0$ یا 1 یا -1

مجموع مقادیر $=0+1+(-1)=$ صفر

۱۱۳. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2} \to \frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{1}{2}$$

$$x^2+x=4x+2 \to x^2-3x-2=0$$

هر دو ریشه قابل قبول‌اند چون مخرج‌ها را صفر نمی‌کنند. مجموع جواب‌های معادله $S=-\frac{b}{a}=3$ است.

۱۱۴. گزینه ۲ درست است.

عبارت $-(x^4+1), -x^2-x-1$ همواره نامثبت و عبارت $|x|+1$ همواره مثبت است، پس کافی است عبارت $9x^2+(2m+3)x+m^2$ همواره مثبت باشد.

$$\Delta=(2m+3)^2-36m^2=(2m+3-6m)(2m+3+6m)=(-4m+3)(8m+3)<0$$

m		$-\frac{3}{8}$		$\frac{3}{4}$	
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow m\notin\left[-\frac{3}{8},\frac{3}{4}\right]$$

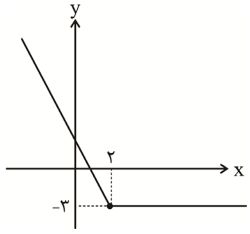
بنابراین $a-b=\frac{3}{4}-(-\frac{3}{8})=\frac{9}{8}$ است.

۱۱۵. گزینه ۱ درست است.

با دقت به اینکه $\sqrt{A^۲}=|A|$ ضابطه f به‌صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=|x-۲|-(x+۱)$$

که برای $x>۲$ و $x<۲$ در دو حالت قدرمطلق را بر می‌داریم. $f(x)\begin{cases}-۳, x\geq ۲\\ -۲x+۱, x<۲\end{cases}$ و نمودار آن به‌صورت روبه رو است:



پس f در بازه $(-\infty,۲]$ و هر زیرمجموعهٔ آن اکیداً نزولی است.

۱۱۶. گزینه ۲ درست است.

$$\left.\begin{aligned}&(۰/۰۴)^a=(\frac{۱}{۲۵})^a=۵^{-۲a}\\&۲\sqrt[۸]{۳۲}=۲\times۲^{\frac{۵}{۸}}=۲^{\frac{۱۳}{۸}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۵^{-۲a}=۲^{\frac{۱۳}{۸}}$$

$$(\frac{۱}{۲})^b=۲۵\Rightarrow ۲^{-b}=۵^۲\Rightarrow ۵=\sqrt{۲^{-b}}=۲^{\frac{-b}{۲}}$$

$$۵^{-۲a}=(۲^{\frac{-b}{۲}})^{-۲a}=۲^{ab}=۲^{\frac{۱۳}{۸}}\Rightarrow ab=\frac{۱۳}{۸}$$

$$\frac{۱۱۲}{۲۶}\times ab=\frac{۱۱۲}{۲۶}\times\frac{۱۳}{۸}=۷\to \log_{۴۹}^{۷}=\frac{۱}{۲}$$

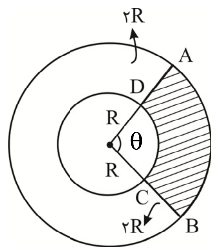
۱۱۷. گزینه ۳ درست است.

اگر تابعی به فرم $y=\dfrac{ax^nbx^{n-۱}+\dots}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\dots}$ تابع ثابت $y=k$ باشد آنگاه $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dots=\underset{\text{ضابطه تابع}}{\underset{\downarrow}{k}}$ می‌باشد بنابراین:

$$\frac{a+۲}{a}=\frac{۳}{۱}=\frac{۲c-۱}{۴}\to\begin{cases}\dfrac{a+۲}{a}=\dfrac{۳}{۱}\to a=۱\\[2mm] \dfrac{۲c-۱}{۴}=\dfrac{۳}{۱}\to c=\dfrac{۱۳}{۲}\end{cases}$$

حاصل $\dfrac{-۲a}{-۳a+۲c}=\dfrac{-۲}{۱۰}$ می‌باشد.

۱۱۸. گزینه ۲ درست است.



$$S_۱=۹S_۲\to \pi R_۱^۲=۹\times\pi R_۲^۲$$

پس شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر $\dfrac{R_۱}{R_۲}=۳\to$ ۳ برابر شعاع دایره کوچک‌تر است.

$$\text{محیط رنگی}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+BC+AD=۳R\theta+R\theta+۲R+۲R=۴R\theta+۴R=۴R(۱+\theta)$$

$$\frac{\text{محیط رنگی}}{\text{محیط دایره کوچک}}=\frac{۳}{۱}=\frac{۴R(۱+\theta)}{۲\pi R}\qquad ۳\pi=۲(۱+\theta)\qquad ۳\pi=۲+۲\theta\to\theta=\frac{۳\pi-۲}{۲}$$

$$\theta=\frac{۳\times۳/۱۴-۲}{۲}=۳/۷۱\text{rad}$$

تبدیل درجه به رادیان $\Rightarrow ۳/۷۱\times۵۷/۳\simeq۲۱۲^\circ$

۱۱۹. گزینه ۲ درست است.

با توجه به ناحیه‌ها و تغییر نسبت در حضور $\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\frac{\sin(\overbrace{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\text{دوم}})+\cos(\overbrace{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\text{چهارم}})}{\sin\underbrace{(\pi+\alpha)}_{\text{سوم}}-\cos\underbrace{(\alpha-\pi)}_{\text{سوم}}}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=4$$

طرفین وسطین:

$$\cos\alpha+\sin\alpha=-4\sin\alpha+4\cos\alpha\Rightarrow 5\sin\alpha=3\cos\alpha\Rightarrow\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{5}{3}$$

۱۲۰. گزینه ۲ درست است.

با توجه به رابطهٔ $1+\cos u=2\cos^2\frac{u}{2}$ می‌توان نوشت:

$$2\cos^2\frac{x}{2}\times 2\cos^2\frac{x}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}\times\cos^2\frac{x}{4}=\frac{1}{16}\xrightarrow{\times\sin^2\frac{x}{4}}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}\times\sin^2\frac{x}{4}\times\cos^2\frac{x}{4}=\frac{1}{16}\times\sin^2\frac{x}{4}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}\times(\frac{1}{2}\times\sin\frac{x}{2})^2=\frac{1}{4}\sin^2\frac{x}{2}\times\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{16}\times\sin^2\frac{x}{4}$$

$$\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2}\times\sin x)^2=\frac{1}{16}\times\sin^2\frac{x}{4}$$

$$\sin^2 x=\sin^2\frac{x}{4}\rightarrow x=k\pi\pm\frac{x}{4}$$

$$\begin{cases}x+\frac{x}{4}=k\pi\rightarrow\frac{\pi}{4}x=k\pi\rightarrow x=\frac{4k\pi}{5}\\ x-\frac{x}{4}=k\pi\rightarrow\frac{3}{4}x=k\pi\rightarrow x=\frac{4k\pi}{3}\end{cases}$$

k	۰	۱	۲	۳
x	۰	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$	$\cancel{\frac{12\pi}{5}}$

k	۰	۱	۲
x	۰	$\frac{4\pi}{3}$	$\cancel{\frac{8\pi}{3}}$

جواب‌ها $\left\{0,\frac{4\pi}{5},\frac{8\pi}{5},\frac{4\pi}{3}\right\}$ است.
تعداد جواب‌ها ۴ تا می‌باشد.

۱۲۱. گزینه ۳ درست است.

$$y=a+\sin(\frac{\pi}{2}+b\pi x)$$

$$y=a+\cos(b\pi x)$$

$$2T=4\rightarrow T=2$$

$$T=\frac{2\pi}{|b\pi|}\to\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{1}\to|b|=1$$

$$b=\pm 1$$
$$\max=3=a+1\to a=2$$
$$a+b=2\pm1=3 \text{ یا } 1$$

۱۲۲. گزینه ۲ درست است.

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt[3]{x}-1}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

جواب حد $\frac{3}{2}$ است.

۱۲۳. گزینه ۲ درست است.

ابتدا حد تابع $f(x)$ را در $+\infty$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-5x+6)+13x-11}{x^2-5x+6}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}2+\frac{13x-11}{x^2-5x+6}=2+0^+=2^+$$

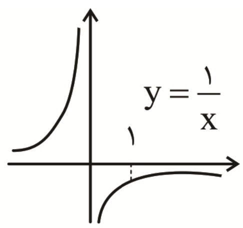
کافی است برای محاسبهٔ مقدار حد تابع $y=fof(x)$ در $+\infty$، حد راست تابع $f(x)$ را در $x=2$ محاسبه کنیم.

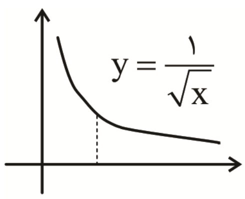
$$\lim_{x\to+\infty}fof(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2+3x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{15}{0^+\times-1}=\frac{15}{0^-}=-\infty$$

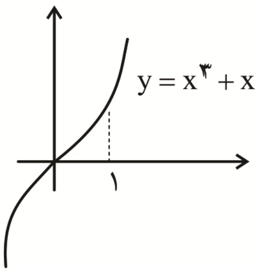
۱۲۴. گزینه ۳ درست است.

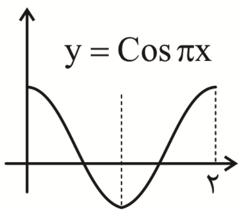
برای اینکه تابع $y=[f(x)]$ در $x=1$ فقط از چپ پیوسته باشد، به شرط پیوسته بودن خود تابع در $x=1$، باید تابع f در همسایگی $x=1$ اکیداً نزولی باشد و مقدار $f(1)$ عددی صحیح باشد.

با توجه به نمودارهای توابع زیر:









فقط تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ در همسایگی $x=1$ اکیداً نزولی است.

۱۲۵. گزینه ۲ درست است.

ضابطهٔ تابع f را ساده‌تر می‌نویسیم و سپس وارون آن را مشخص می‌کنیم.

$$f(x+۱)=(x+۱)^۳-۲ \Rightarrow f(t)=t^۳-۲$$

اکنون برای به‌دست آوردن $g(x)=f^{-۱}(x)+f(x+۱)-x$ باید $y=f^{-۱}(x)$ را بیابیم.

$$y=x^۳-۲ \Rightarrow y+۲=x^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y+۲}=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۲}$$

$$g(x)=f^{-۱}(x)+f(x+۱)-x=\sqrt[۳]{x+۲}+x^۳+۳x^۲+۲x-۱$$

$$g'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}+۳x^۲+۶x+۲$$

اکنون شیب خط مماس را می‌یابیم:

$$m=g^{-۱}(-۱)=\frac{۱}{۳}+۳-۶+۲=-\frac{۲}{۳}$$

۱۲۶. گزینه ۴ درست است.

ریشه‌های درجهٔ یک عبارت داخل قدرمطلق $x=۰$ و $x=۴$ است. با توجه به مفروضات سؤال نقطهٔ موردنظر $x=۴$ است.

$$f'_{+}(۴)=\lim_{x\to ۴^{+}}\frac{(x-۲)|x^۲-۴x|-۰}{x-۴}=\lim_{x\to ۴^{+}}\frac{(x-۲)x\cancel{(x-۴)}}{\cancel{x-۴}}$$
$$=\lim_{x\to ۴^{+}}x(x-۲)=۴\times۲=۸$$

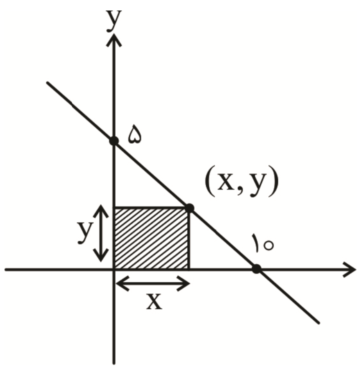
۱۲۷. گزینه ۴ درست است.

اگر خط $y=k$ را اکسترمم نسبی تابع در نظر بگیریم، معادلهٔ $f(x)=k$ باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\frac{x^۲+۲}{x+۱}=k \rightarrow x^۲+۲=kx+k \rightarrow x^۲-kx+۲-k=۰$$
$$\Delta=۰ \rightarrow k^۲-۴(۲-k)=۰ \rightarrow k^۲+۴k-۸=۰$$

ریشه‌های این معادله y_{max} و y_{min} تابع هستند و مجموع آن‌ها را به کمک فرمول $S=-\frac{b}{a}=-\frac{۴}{۱}=-۴$ محاسبه می‌کنیم.

۱۲۸. گزینه ۱ درست است.



$$\text{مساحت}=x\times y=x\times(\frac{۱۰-x}{۲})$$
$$=\frac{۱۰x-x^۲}{۲}$$
$$S'=۰ \rightarrow \frac{۱}{۲}(۱۰-۲x)=۰ \rightarrow x=۵$$
$$y=\frac{۱۰-x}{۲}\xrightarrow{x=۵}y=\frac{۵}{۲}$$
$$S_{max}=x\times y=۵\times\frac{۵}{۲}=\frac{۲۵}{۲}=۱۲/۵$$

۱۲۹. گزینه ۳ درست است.

در این ۱۱ داده، میانه برابر $x_۶=۱۴$ است. چارک‌های اول و سوم به‌ترتیب دادهٔ سوم و نهم هستند: $Q_۱=۱۰, Q_۳=۲۱$
پس با حذف داده‌های بیشتر از $Q_۳$ و کمتر از $Q_۱$ داریم:

۱۰,۱۲,۱۲,۱۴,۱۷,۲۰,۲۱

در این ۷ داده میانه برابر ۱۴ و میانگین برابر $\overline{X}=\frac{\text{جمع}}{۷}=\frac{۱۰۶}{۷}$ است و اختلافشان می‌شود

$$\frac{۱۰۶}{۷}-۱۴=\frac{۸}{۷}$$

۱۳۰. گزینه ۳ درست است.

تعداد کل را منهای تعداد اعداد فرد کنیم:

یک رقمی : $\dfrac{۲}{۱ \text{ یا } ۳}$

دو رقمی : $(۴\times۴)-(۳\times\dfrac{۲}{۱ \text{ یا } ۳})=۱۰$

سه رقمی : $(۴\times۴\times۳)-(۳\times۳\times\dfrac{۲}{۱ \text{ یا } ۳})=۳۰$

چهار رقمی : $(۴\times۴\times۳\times۲)-(۳\times۳\times۲\times\dfrac{۲}{۱ \text{ یا } ۳})=۶۰$

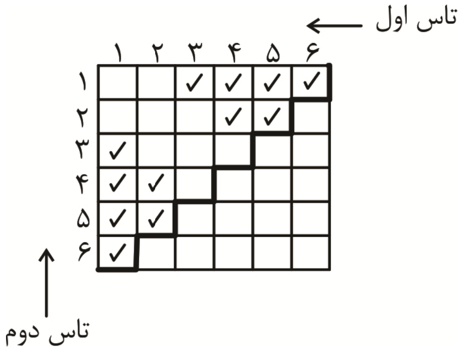
پنج رقمی : $(۴\times۴\times۳\times۲\times۱)-(۳\times۳\times۲\times۱\times\dfrac{۲}{۱ \text{ یا } ۳})=۶۰$

$۲+۱۰+۳۰+۶۰+۶۰=۱۶۲$

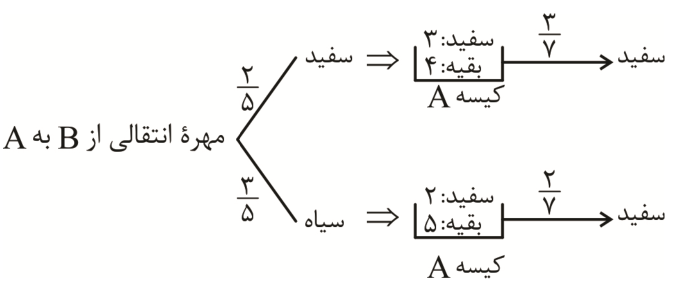
۱۳۱. گزینه ۲ درست است.

با توجه به صفحه شطرنجی روبه‌رو از کل $n(S)=۳۶$ حالت، ۱۲ تا مورد قبول است، پس $n(A)=۱۲$ و بنابراین:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۳}$$



۱۳۲. گزینه ۳ درست است.



پس احتمال خارج شدن مهره سفید از کیسه A برابر است با:

$$\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۷}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

۱۳۳. گزینه ۲ درست است.

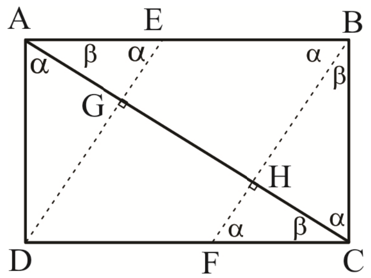
یک‌بار $m=۱$ و یک‌بار $m=-۴$ را به معادله می‌دهیم تا مختصات نقطهٔ ثابت را به‌دست آوریم در (ریشه‌های ضریب‌های x و y را می‌دهیم.)

$$\left.\begin{array}{l} m=۱ \rightarrow ۵y=۴ \rightarrow y=\dfrac{۴}{۵} \\ m=-۴ \rightarrow -۵x=۴ \rightarrow x=\dfrac{-۴}{۵} \end{array}\right\} A,(\frac{-۴}{۵},\frac{۴}{۵})$$

حال فاصله نقطه A را از خط L به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{|۳\times\frac{-۴}{۵}+۳\times\frac{۴}{۵}+۷|}{\sqrt{۳^۲+۳^۲}}=\frac{۷}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۷\sqrt{۲}}{۶}$$

۱۳۴. گزینه ۴ درست است.



$$\overset{\Delta}{FCB} \sim \overset{\Delta}{CBA}$$

$$\frac{BF}{AC}=\frac{FC}{BC}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{FC}{3}=\frac{3}{4} \Rightarrow FC=\frac{9}{4}$$

پس: $DF=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$

و مساحت متوازی‌الاضلاع EBFD برابر است با $\frac{7\times 3}{4}=\frac{21}{4}$

مساحت مثلث FHC را هم حساب می‌کنیم. پس مثلث با ABC به نسبت $\frac{FC}{AC}=\frac{\frac{9}{4}}{5}$ متشابه است

پس:

$$S_{FHC}=\left(\frac{9}{20}\right)^2 S_{ABC}$$

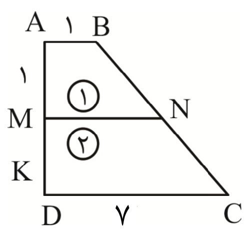
$$=\frac{81}{400}\times\frac{3\times 4}{2}=\frac{81\times 3}{200}=\frac{243}{200}$$

نسبت آن‌ها می‌شود:

$$\frac{\frac{21}{4}}{\frac{243}{200}}=\frac{21\times \cancel{200}^{50}}{\cancel{4}\times 243}$$

که برابر است با: $\frac{1050}{243}$ که تقریباً ۴ برابر است.

۱۳۵. گزینه ۱ درست است.



می‌دانیم طول MN برابر است با: $MN=\frac{AM.CD+DM.AB}{AM+MD}=\frac{7+k}{1+k}$

همچنین نسبت ارتفاع‌های دو ذوزنقه هم $\frac{1}{k}$ است، پس:

$$\frac{S_{(1)}}{S_{(2)}}=\frac{1+\frac{7+k}{1+k}}{7+\frac{7+k}{1+k}}\times\frac{1}{k}=\frac{8+2k}{14+8k}\times\frac{1}{k}=1\Rightarrow 8k^2+14k=2k+8\Rightarrow 2k^2+3k-2=0\xrightarrow{k>0}k=\frac{1}{2}$$

۱۳۶. گزینه ۳ درست است.

مقدار x را ساده‌تر می‌کنیم.

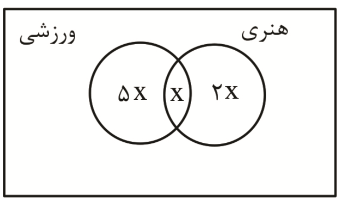
$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}\times\frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}-1}=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{4-1}=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{3}$$

عبارت خواسته‌شده را نیز به‌صورت مکعب کامل ساده می‌کنیم.

$$x^3+x^2+\frac{x}{3}+1=\left(x+\frac{1}{3}\right)^3+\frac{26}{27}=\left(\frac{\sqrt[3]{4}-1}{3}+\frac{1}{3}\right)^3+\frac{26}{27}=\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^3+\frac{26}{27}=\frac{30}{27}=\frac{10}{9}$$

۱۳۷. گزینه ۲ درست است.

طبق نمودار وِن



$2x+x+5x=48\to 8x=48\to x=6$ نفر

نفر $=5x=30$ تعداد افراد فقط در گروه ورزشی

۱۳۸. گزینه ۴ درست است.

شش جملهٔ دنبالهٔ حسابی ایجادشده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$a_1r^2, a_1r^3, \underbrace{x, y, z}_{\text{سه عدد جدید}}, a_1r^4$$

می‌دانیم:

$$\frac{a_1r^4 - a_1r^3}{4} = a_1r^3 - a_1r^2 = d \to \frac{\cancel{a_1}r^3\cancel{(r-1)}}{4} = \cancel{a_1}r^2\cancel{(r-1)} \xrightarrow{r\neq 1} r = 4$$

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر ۴ است.

۱۳۹. گزینه ۱ درست است.

شرط تساوی ضابطه‌ها را بررسی می‌کنیم:

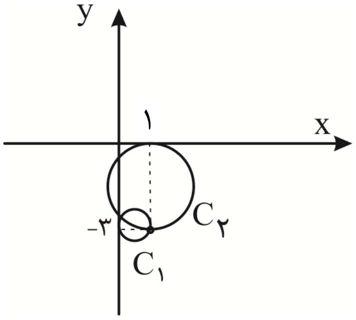
$$\sqrt{ax^2 + 4ax} = \sqrt{(a^2-2)x^2 + bx} \to \begin{cases} a = a^2 - 2 \to a^2 - a - 2 = 0 \to \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases} \\ b = 4a \end{cases}$$

به‌ازای $a = 2$ و $b = 8$ دامنهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ و دامنهٔ تابع g به‌صورت $[0, +\infty)$ در می‌آید که درنهایت دو تابع مساوی نیستند.

به‌ازای $a = -1$ و $b = -4$ دامنهٔ تابع‌های f و g هر دو $[-4, 0]$ هستند و دو تابع برابرند؛ پس: $a + b = -5$

۱۴۰. گزینه ۲ درست است.

با توجه به شکل داریم:



$$C_1 : O_1(\frac{1}{2}, -3), r_1 = \frac{1}{2}$$

$$C_2 : O_2(1, \frac{-3}{2}), r_2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{بیشترین فاصله} = O_1O_2 + r_1 + r_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} + 2$$