Kanoon.ir

درخت تو گر بار دانش بگیرد

به زیر آوری چرخ نیلوفری را

شما با دانلود این نمونه سوال، کد تخفیف خرید کتاب از سایت کانون بوک دریافت می کنید

برای دریافت کد جایزه خود، عدد 33 را به سر شماره 90008451 ارسال کنید.

kanoonBook.ir

www.kanoon.ir

نام و نام خانوادگی:

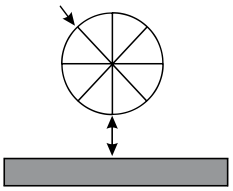
نام آزمون: آزمون فصل مثلثات و حد

دبیرستان فرزانگان۷

۱ - ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = ۲\sin^۴ x - ۵$ ب) $g(x) = -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰$

۲ - فرض کنید چرخ‌وفلکی به قطر $۲۰m$ داریم. اگر پایین‌ترین نقطهٔ چرخ‌وفلک۳ متر از سطح زمین بالاتر باشد، ارتفاع کابین مشخص شده (در شکل) را از سطح زمین به شکل تابعی از زاویهٔ α، که کابین با محور فقی چرخ‌وفلک در هر لحظه می‌سازد، بیابید.



۳ - اگر $\lim_{x\to\infty} \frac{|x^۲ - ۴|}{ax^۲ - x + ۲} = -۱$ آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x = -۲$ چقدر است؟

۴ - معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳$$

www-kanoon-ir

۵- اگر $\lim_{x\to-\infty}\left((x+۱)^۳+mx^۳-۴x^۲+۲\right)=+\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

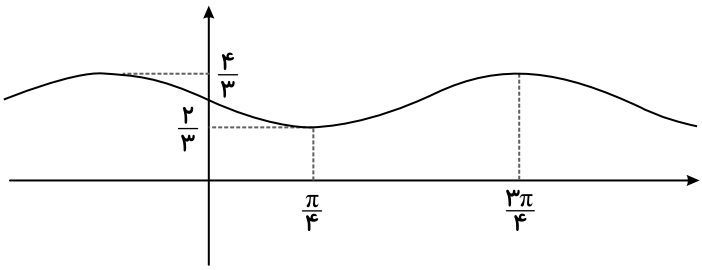
۶- حاصل $\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-۲x+۱}{x-۲}\right]$ را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۷- حاصل هر یک از حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۲+\sin x}-\sqrt{۲-\sin x}}{۳x}$$

۸- نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ به صورت زیر است، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.

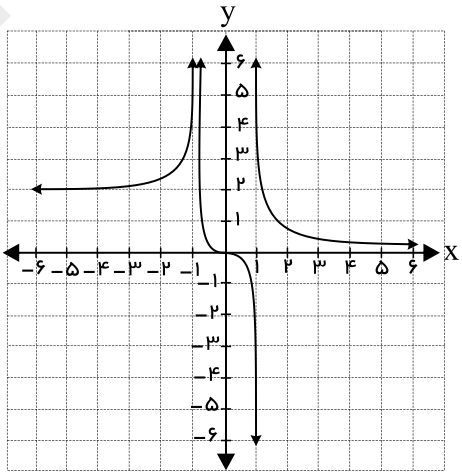


www-kanoon-ir

۹ - مقدار عددی عبارت $(\frac{۱}{۲} + \cos\frac{۵\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲} - \sin\frac{\pi}{۱۲})$ را حساب کنید.

۱۰ - مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

۱۱ - نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر است. حدود خواسته‌شده را محاسبه کنید.



الف) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

پ) $\lim_{x\to-۱} f(x) =$ ت) $\lim_{x\to(۱)^-} f(x) =$

۱۲ - اگر باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x - ۱$ برابر ۳ و باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x^۲ - ۴$ عبارت $۳x + ۱$ باشد، باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x^۲ - ۳x + ۲$ را بیابید.

www-kanoon-ir

۱۳ - با فرض $f(x)=\log_{۰/۲}^{(x+۱)}$، **حاصل** $\lim_{x\to(-۱)^+}[\frac{x-۲}{f(x)}]$ **را بیابید.** ($[\,]$ **نماد جزء صحیح است.**)

۱۴ - جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\cos(۴x+\frac{\pi}{۴})+\sin ۳x=۰$$

www-kanoon-ir

پاسخنامه تشریحی

۱ -

نکته: زوج $n \to ۰ \le \sin^n u \le ۱$ و $۰ \le \cos^n u \le ۱$

نکته: فرد $n \to -۱ \le \sin^n u \le ۱$ و $-۱ \le \cos^n u \le ۱$

الف) $f(x) = ۲\sin^۴ x - ۵$

$$۰ \le \sin^۴ x \le ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰ \le ۲\sin^۴ x \le ۲ \Rightarrow ۰ - ۵ \le ۲\sin^۴ x - ۵ \le ۲ - ۵$$

$$\Rightarrow -۵ \le f(x) \le -۳ \Rightarrow min\ f = -۵ \quad و \quad max\ f = -۳$$

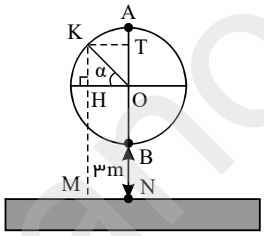
ب) $g(x) = -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰$

$$-۱ \le \sin^۵ ۲x \le ۱ \xrightarrow{\times(-۳)} ۳ \ge -۳\sin^۵ ۲x \ge -۳ \Rightarrow -۳ + ۱۰ \le -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰ \le ۳ + ۱۰$$

$$\Rightarrow ۷ \le g(x) \le ۱۳ \Rightarrow min\ g = ۷ \quad و \quad max\ g = ۱۳$$

۲ - فرض می‌کنیم کابین با محور افقی چرخ‌وفلک زاویهٔ $\hat{\alpha}$ می‌سازد.

باتوجه به شکل داریم:



$y = AN - AT$ ارتفاع کابین از زمین

$$y = ۲۳ - (OA - OT) \xrightarrow{OA=۱۰} y = ۲۳ - (۱۰ - OT)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{OHK}$: $\frac{KH}{OK} = \sin\alpha \xrightarrow{OK=۱۰} ۱۰\sin\alpha = KH \xrightarrow{KH=OT} ۱۰\sin\alpha = OT \Rightarrow y = ۲۳ - (۱۰ - ۱۰\sin\alpha) \Rightarrow y = ۲۳ - ۱۰ + ۱۰\sin\alpha$

$y = ۱۳ + ۱۰\sin\alpha$

۳ -

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x^۲ - ۴|}{ax^۲ - x + ۲} = -۱$$

ناچاریم هر دو حالت $x \to +\infty$ و $x \to -\infty$ را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x^۲ - ۴|}{ax^۲ - x + ۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲ - ۴}{ax^۲ - x + ۲} = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^۲}}{a\cancel{x^۲}} = -۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-۲^+} \frac{|x^۲ - ۴|}{-x^۲ - x + ۲} = \lim_{x\to-۲^+} \frac{-(x-۲)(\cancel{x+۲})}{-(\cancel{x+۲})(x-۱)} = \frac{۴}{۳}$$

حالت دوم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x^۲ - ۴|}{ax^۲ - x + ۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^۲ + ۴}{ax^۲ - x + ۲} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^۲}{ax^۲} = \frac{-۱}{a} = -۱ \Rightarrow a = ۱$$

پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-۲^+} \frac{|x^۲ - ۴|}{x^۲ - x + ۲} = \lim_{x\to-۲^+} \frac{-(x-۲)(x+۲)}{x^۲ - x + ۲} = \frac{۰}{۸} = ۰$$

۴ - می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳ \Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - (\frac{۵\pi}{۸} - x)) - ۳ = ۰$$

www-kanoon-ir

$$\Rightarrow \sin^{۲}(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۸}+x)-۳=۰$$

$$\Rightarrow \sin^{۲}(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(x-\frac{\pi}{۸})-۳=۰\ ,\ \sin(x-\frac{\pi}{۸})=t$$

$$\Rightarrow t^{۲}+۲t-۳=۰\Rightarrow t=۱\ ,\ t=-۳$$

$$\sin(x-\frac{\pi}{۸})=-۳\ \text{غ ق ق}\ ,\ \sin(x-\frac{\pi}{۸})=۱\Rightarrow x-\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۸}$$

۵ - با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots\overset{\sim}{\to}\pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱+mx^{۳}-۴x^{۲}+۲)=\lim_{x\to-\infty}((m+۱)x^{۳}-x^{۲}+۳x+۳)=+\infty$$

حالت ۱) $m=-۱\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}(-x^{۲}+۳x+۳)=\lim_{x\to-\infty}(-x^{۲})$

$=-(-\infty)^{۲}=-(+\infty)=-\infty$ غیر قابل قبول

حالت ۲) $m\neq-۱\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}((m+۱)x^{۳}-x^{۲}+۳x+۳)=\lim_{x\to-\infty}(m+۱)x^{۳}$

$$\Rightarrow(m+۱)(-\infty)^{۳}=(m+۱)(-\infty)=+\infty\Rightarrow m+۱<۰\Rightarrow m<-۱$$

۶ - می‌دانیم $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۲x+۱}{x-۲}=-۲$، حال باید ببینیم $\frac{-۲x+۱}{x-۲}$ چگونه به -۲ میل می‌کند. برای این کار -۲ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{-۲x+۱}{x-۲}]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{-۲x+۴-۳}{x-۲}]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{-۲(x-۲)}{x-۲}+\frac{-۳}{x-۲}]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}[-۲+\frac{-۳}{x-۲}]$$

$$=\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}[-۲+\frac{-۳}{x-۲}]=[-۲+\frac{-۳}{+\infty}]=[-۲+۰^{-}]=[-۲-\varepsilon]=-۳\\ \lim_{x\to-\infty}[-۲+\frac{-۳}{x-۲}]=[-۲+\frac{-۳}{-\infty}]=[-۲+۰^{+}]=[-۲+\varepsilon]=-۲\end{cases}$$

۷ -

الف

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۲+\sin x}-\sqrt{۲-\sin x}}{۳x}\times\underbrace{\frac{\sqrt{۲+\sin x}+\sqrt{۲-\sin x}}{\sqrt{۲+\sin x}+\sqrt{۲-\sin x}}}_{A}=\lim_{x\to۰}\frac{۲+\sin x-۲+\sin x}{(۳x)(A)}=\lim_{x\to۰}\frac{۲}{۳A}=\frac{۲}{۳\times۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}$$

۸ -

$$\begin{cases}|a|+c=\frac{۴}{۳}\\ -|a|+c=\frac{۲}{۳}\end{cases}\quad\text{یا}\quad\begin{cases}c=\frac{\max+\min}{۲}\\ |a|=\frac{\max-\min}{۲}\end{cases}\Rightarrow c=۱,|a|=\frac{۱}{۳}$$

$$T=\frac{۲}{|b|}\Rightarrow|b|=۲$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}\sin(۲x)+۱\ \text{یا}\ y=\frac{۱}{۳}\sin(-۲x)+۱$$

۹ -

$$A=(\frac{۱}{۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲}+\cos\frac{۵\pi}{۱۲})$$

می‌دانیم: $\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{۶\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\cos\frac{۵\pi}{۱۲}=\sin\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow A=(\frac{۱}{۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲}+\sin\frac{\pi}{۱۲})\Rightarrow A=\frac{۱}{۴}-\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}\xrightarrow{\text{از طرفی}}\sin^{۲}\alpha=\frac{۱-\cos۲\alpha}{۲}$

www.kanoon.ir

$$\Rightarrow \sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}\Rightarrow \sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow A=\frac{۱}{۴}-(\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۴})$$

$$A=\frac{-۱}{۴}+\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}$$

۱۰ -

$$f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱$$

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow r=f(۲)=۰\Rightarrow ۲^{۳}+a\times ۲^{۲}+b\times ۲+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۸+۴a+۲b+۱=۰\Rightarrow ۴a+۲b=-۹\quad (۱)$$

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow r=f(-۱)=۰\Rightarrow (-۱)^{۳}+a(-۱)^{۲}+b(-۱)+۱=۰$$

$$\Rightarrow -۱+a-b+۱=۰\Rightarrow a-b=۰\Rightarrow a=b$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۴a+۲a=-۹\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=b=-\frac{۳}{۲}$$

۱۱ -

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۲$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰$

پ) $\lim\limits_{x\to-۱} f(x)=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to۱^{-}} f(x)=-\infty$

۱۲ -

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=f(۱)=۳$$

$$f(x)=(x^{۲}-۴)q(x)+۳x+۱\xrightarrow{x=۲} f(۲)=۰+۶+۱=۷$$

باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x^{۲}-۳x+۲$ عبارت درجهٔ اولی به‌صورت $ax+b$ می‌باشد که داریم:

$$f(x)=(x^{۲}-۳x+۲)q'(x)+ax+b\ ,\ x^{۲}-۳x+۲=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=۲$$

$$x=۱\Rightarrow f(۱)=۰+a+b\Rightarrow a+b=۳$$

$$x=۲\Rightarrow f(۲)=۰+۲a+b\Rightarrow ۲a+b=۷$$

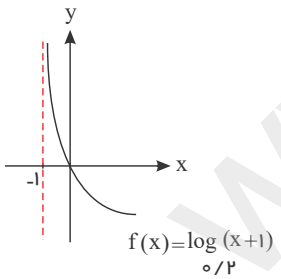
$$-\begin{cases} a+b=۳\\ ۲a+b=۷\end{cases}$$

$$a=۴\Rightarrow ۴+b=۳\Rightarrow b=-۱\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=۴x-۱$$

۱۳ - با رسم نمودار تابع $f(x)=\log_{۰/۲}^{(x+۱)}$ داریم:

با توجه به نمودار هرچه x از راست به -۱ نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-۱)^{+}} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^{+}} \log_{۰/۲}^{(x+۱)}=+\infty$$



$$\lim_{x\to(-۱)^{+}}[\frac{x-۲}{f(x)}]=[\frac{-۱-۲}{+\infty}]=[\frac{-۳}{+\infty}]=[۰^{-}]=-۱$$

۱۴ - نکته: $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$

نکته: $\cos u=\cos v\Rightarrow u=۲k\pi\pm v$

$$\cos(۴x+\frac{\pi}{۴})+\sin ۳x=۰\Rightarrow \cos(۴x+\frac{\pi}{۴})=-\sin ۳x=\cos(\frac{\pi}{۲}+۳x)$$

$$۴x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}+۳x)$$

www-kanoon-ir

$$۴x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۳x \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$۴x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - ۳x \Rightarrow ۷x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۷} - \frac{۳\pi}{۲۸}$$