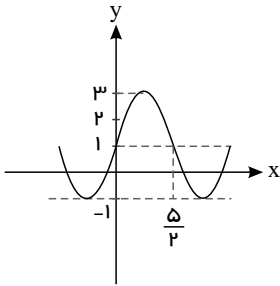




۱- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin 2x + 3 \cos x = 0$

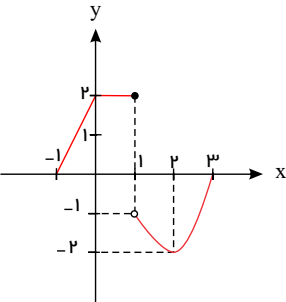
ب) $4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$



۲- اگر نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه آن را بنویسید.

۳- جواب‌های کلی معادله مثلثاتی زیر را بیابید.

$\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 3x = 0$



۴- نمودار تابع $y = f(x - 1)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = f\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$ را رسم کنید.

۵- برد تابع $f(x) = \left[\pi \cos 2x - \frac{\pi}{2}\right]$ را بیابید. ([] جزء صحیح است)

۶- معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{8} - x\right) = 3$

۷- اگر $\tan \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، آنگاه حدود α را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

۸- صعودی و نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$f(x) = [-2x] + 1$



پاسخنامه تشریحی

۱ -

نکته: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

نکته: $\sin u = \sin v \rightarrow u = 2k\pi + v$, $u = 2k\pi + \pi - v$

الف) $\sin 2x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2 \sin x + 3) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $2 \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{2}$ غی قی

ب) $2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 \times 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

$\Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

$\frac{T}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow T = 5 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 5 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{5} \xrightarrow{b>0} b = \frac{2\pi}{5}$

$\left. \begin{matrix} \max = |a| + c = 3 \\ \min = -|a| + c = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a>0} a = 2$

$f(x) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right) + 1$

۳ - نکته: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

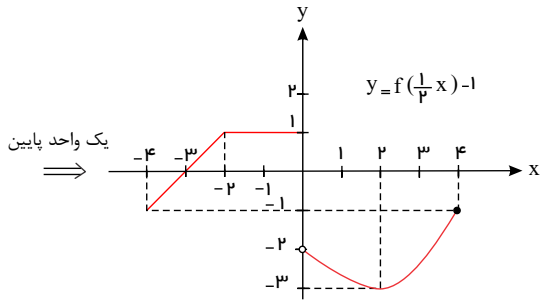
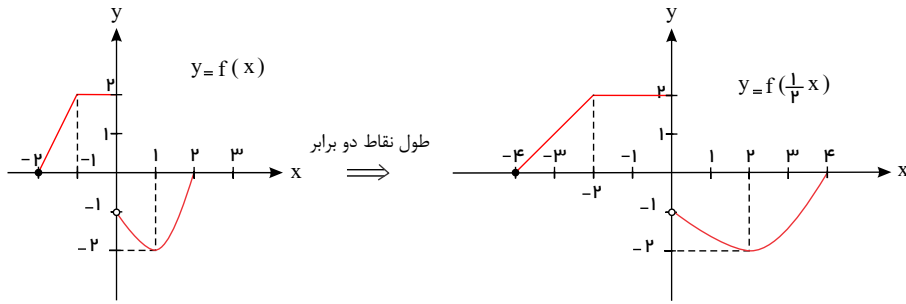
$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin 3x = 0 \Rightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = -\sin 3x = \cos(\frac{\pi}{2} + 3x)$

$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + 3x)$

$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

$2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 5x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{3\pi}{20}$

۴ - با توجه به اینکه برای رسم $y = f(x - 1)$ باید $y = f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم، پس برای رسم $y = f(x)$ از روی $y = f(x - 1)$ باید نمودار $y = f(x - 1)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم. پس داریم:



$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -\pi \leq \pi \cos 2x \leq \pi \Rightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi \cos 2x - \frac{\pi}{2} \leq \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq \pi \cos 2x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \left[\pi \cos 2x - \frac{\pi}{2} \right] = -5, -4, \dots, 0, 1$$

$$R_f = \{-5, -4, \dots, 0, 1\}$$

۶- می‌دانیم: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{\lambda} - x\right) = 3 \Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{\lambda} - x\right)\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{\lambda} + x\right) - 3 = 0$$

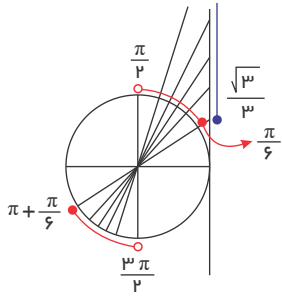
$$\Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) - 3 = 0, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = t$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1, t = -3$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = -3 \text{ غ ق ق } , \sin\left(x - \frac{\pi}{\lambda}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{\lambda}$$

۷- در دایره مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، که داریم:



$$\tan \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{5\pi}{6} \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

- ۸

$$f(x) = [-2x] + 1$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow [-2x_1] \geq [-2x_2] \Rightarrow [-2x_1] + 1 \geq [-2x_2] + 1$$

$$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{نزولی}$$