دفترچه پاسخ

آزمون ۲ آذر ۱۴۰۳

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	بهمن امیدی-علی آزاد-داود بوالحسنی-افشین خاصه‌خان-سینا خیرخواه-محمدرضا راسخ-ستار زواری-محمدرضا کشاورزی مهسان گودرزی-میلاد منصوری-علیرضا نداف‌زاده-جهانبخش نیکنام
	هندسه	اسحاق اسفندیار-آرین تفضلی‌زاده-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-کیوان دارابی-فرشاد صدیقی‌فر-هومن عقیلی-احمدرضا فلاح مجتبی مظاهری‌فر-نیما مهندس
	آمارورياضيات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-علی ایمانی-آرین تفضلی‌زاده-افشین خاصه‌خان-فرزانه خاکپاش-کیوان دارابی-مصطفی دیداری سوگند روشنی-احمدرضا فلاح-نیلوفر مهدوی-نیما مهندس
	فیزیک	کامران ابراهیمی-حسین الهی-بهزاد آزادفر-علیرضا جباری-سیاوش خادمی-مسعود خندانی-محمدرضا شریفی-مهدی شریفی پوریا علاقه‌مند-سیاوش فارسی-ادریس محمدی-آراس محمدی-محمد مقدم-محمدکاظم منشادی-امیراحمد میرسعید حسام نادری-مجتبی نکوئیان
	شیمی	امیرعلی بیات-علیرضا بیانی-محمدرضا پورجاوید-سعید تیزرو-محمدرضا جمشیدی-امیر حاتمیان-امیرحسین حسن‌نژاد پیمان خواجوی‌مجد-یاسر راش-محمدرضا طاهری‌نژاد-امیرحسین طیبی-آرمین عظیمی-محمد عظیمیان‌زواره-آرمان قنواتی محسن مجنونی-فرشید مرادی-امیرحسین ملازینل

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	آمارورياضيات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	علیرضا نداف‌زاده	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	حسام نادری	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب مهبد خالتی امیرمحمدکریمی محمد خندان	امیرحسین ابومحبوب مهبد خالتی امیرمحمدکریمی محمد خندان	بهنام شاهنی زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم احسان پنجه‌شاهی امیرحسین کمره ای
ویراستاری رتبه های برتر	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان سیدماهد عبدی محمدپارسا سبزه‌ای	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان محمدپارسا سبزه‌ای	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان محمدپارسا سبزه‌ای	سینا صالحی ماهان فرهمندفر	آرمان قنواتی امیرحسین ملازینل
بازنویسی آزمون	محمدرضا راسخ	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	سینا صالحی	----
مسئول درس	مهرداد ملوندی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	سجاد سلیمی	سجاد سلیمی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران(مستندسازی)	احسان صادقی-سجاد سلیمی-علیرضا عباسی‌زاهد - معصومه صنعت‌کار			مهدی گنجی‌وطن علی سلطانی محمد زنگنه	سجاد رضایی محمدصدرا وطنی ملینا ملائی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروف‌نگار	فرزانه فتح اله‌زاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

@master_Azmon

حسابان ۲

۱- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا نداف‌زاده)*

ابتدا عبارت A را به کمک روابط مثلثاتی 2α به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$A = 2\cos^2 x - 3\sin 2x + 2\sin^2 x + 8\cos^2 x$$

$$\Rightarrow A = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) - 3\sin 2x + 8\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = 2 - 3\sin 2x + 4 + 4\cos 2x = 6 - 3\sin 2x + 4\cos 2x$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} A = 6 - 3\sin\frac{\pi}{6} + 4\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow A = 6 - \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} = 4/5 + 2\sqrt{3}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۲)

۲- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا راسخ)*

با توجه به فرض و روابط کسینوس مجموع و تفاضل زوایا داریم:

$$m\cos(x+y) - n\cos(x+y) = m\cos(x-y) + n\cos(x-y)$$

$$m\cos(x+y) - m\cos(x-y) = n\cos(x-y) + n\cos(x+y)$$

$$\Rightarrow m(\cos x\cos y - \sin x\sin y - (\cos x\cos y + \sin x\sin y))$$

$$= n(\cos x\cos y + \sin x\sin y + \cos x\cos y - \sin x\sin y)$$

$$\Rightarrow -2m\sin x\sin y = 2n\cos x\cos y$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y} = \frac{2n}{-2m} \Rightarrow \tan(x)\tan(y) = -\frac{n}{m}$$

(حسابان ۱- صفحهٔ ۱۱۱)

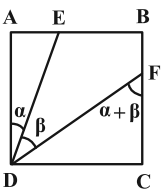
۳- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

در مثلث DAE داریم:

$$AE^2 + AD^2 = DE^2 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = DE^2 \Rightarrow DE = \sqrt{10}$$

با توجه به شکل داریم:

$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } DF} \hat{DFC} = \alpha + \beta$$



$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ و } \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ ، } \sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}$$

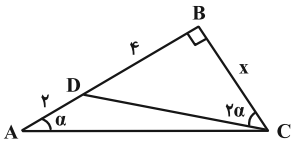
$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{4} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{\sqrt{10}}\cos\beta + \frac{3}{\sqrt{10}}\sin\beta \Rightarrow \frac{3\sqrt{10}}{4} = \cos\beta + 3\sin\beta$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۰ و ۱۱۱)

۴- **گزینهٔ «۳»** *(سینا خیرخواه)*

با توجه به نام‌گذاری در شکل زیر داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC} : \tan\alpha = \frac{x}{6} \text{ ، } \overset{\Delta}{BCD} : \tan 2\alpha = \frac{4}{x}$$

حال به کمک رابطهٔ تانژانت مجموع زوایا داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{\frac{2x}{6}}{1-\frac{x^2}{36}}$$

$$\Rightarrow 4 - \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{3} \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{x>0} x = 3$$

حال در مثلث ABC داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow AC = 3\sqrt{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۵- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا راسخ)*

با توجه به فرض سوال داریم: $\cot\beta = \tan\alpha - 2\tan\beta \quad (*)$

عبارت مورد نظر را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cot\beta}{\tan(\alpha-\beta)} = \frac{\cot\beta}{\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}} = \frac{\cot\beta(1+\tan\alpha\tan\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$= \frac{\cot\beta + \tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta} \xrightarrow{(*)} = \frac{\tan\alpha - 2\tan\beta + \tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$= \frac{2(\tan\alpha-\tan\beta)}{\tan\alpha-\tan\beta} = 2$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۴۲)

۶- **گزینهٔ «۱»** *(علی آزاد)*

ابتدا تساوی اول را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2})}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\frac{\pi}{4}))}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{-\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})} = -\cot(\alpha+\frac{\pi}{4}) = 2 \Rightarrow \tan(\alpha+\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

@master_Azmon

حال به کمک رابطهٔ تانژانت مجموع زوایا داریم:

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\tan\frac{\pi}{4}=1}\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha-1=2\tan\alpha+2\Rightarrow \tan\alpha=-3 \qquad (*)$$

حال از تساوی دوم داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{-3+\tan\beta}{1+3\tan\beta}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -6+2\tan\beta=1+3\tan\beta\Rightarrow\tan\beta=-7$$

(حسابان ۲- صفحهٔ ۴۲)

۷- **گزینهٔ «۲»** *(ستار زواری)*

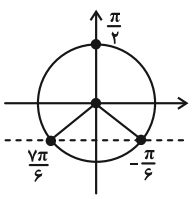
معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$1-2\sin^2 x+\sin x=0\xrightarrow{t=\sin\alpha}-2t^2+t+1=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=1\Rightarrow\sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ t=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ \text{یا}\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب‌های معادله در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ عبارتند از $-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{2}$ و داریم:

$$|\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{6})|=\frac{2\pi}{3}$$



(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۸- **گزینهٔ «۳»** *(بهمن امیدی)*

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+2)+1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)+1=0$$

$$\Rightarrow(\sin x+\cos x+1)^2=0$$

$$\Rightarrow\sin x+\cos x=-1\Rightarrow\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=-1$$

$$\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{x\in[0\ ,\ 2\pi]}x=\frac{3\pi}{2}\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{x\in[0\ ,\ 2\pi]}x=\pi\end{cases}$$

بنابراین در فاصلهٔ $[0\ ,\ 2\pi]$ معادله دارای ۲ جواب است.

(حسابان ۲- صفحه‌های ۳۵ تا ۴۱)

۹- **گزینهٔ «۳»** *(مهسان کوررزی)*

به کمک رابطهٔ تانژانت مجموع زوایا، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}=1+\tan x\Rightarrow\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=1+\tan x$$

$$\Rightarrow 1+\tan x=1-\tan^2 x\Rightarrow\tan^2 x+\tan x=0$$
$$\Rightarrow\tan x(\tan x+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\tan x=0\Rightarrow x=k\pi\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{x\in[0\ ,\ \pi]}x=0\ ,\ \pi\\ \tan x=-1\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}\ ,\ (k\in\mathbb{Z})\\ \xrightarrow{x\in[0\ ,\ \pi]}x=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$$

(حسابان ۲- صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(جهانبخش نیکنام)*

باید معادلهٔ تلاقی دو تابع دارای جواب باشد:

$$\cos 4x+m=2\sin^2 x\Rightarrow 2\cos^2 2x-1+m=2(\frac{1-\cos 2x}{2})$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x=2-m$$

$$\Rightarrow\cos^2 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{2-m}{2}$$

با افزودن $\frac{1}{16}$ واحد به طرفین تساوی، سمت چپ تساوی را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$(\cos 2x+\frac{1}{4})^2=\frac{17-8m}{16}$$

حال به توجه به محدودهٔ x داریم:

$$\frac{2\pi}{3}\le x\le\pi\Rightarrow\frac{4\pi}{3}\le 2x\le 2\pi\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\cos 2x\le 1$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{4}\le\cos 2x+\frac{1}{4}\le\frac{5}{4}\Rightarrow 0\le(\cos 2x+\frac{1}{4})^2\le\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow 0\le\frac{17-8m}{16}\le\frac{25}{16}\Rightarrow-1\le m\le\frac{17}{8}$$

بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با: $\frac{17}{8}-(-1)=\frac{25}{8}$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

@master_Azmon

ریاضی پایه

۱۱- **گزینهٔ «۲»** *(میلاد منصوری)*

ابتدا مجموعه‌های B و C را به صورت نمایش بازه‌ای، بازنویسی می‌کنیم:

$$B=\{x-2k \mid x\in A\}=[1-2k\ ,\ 10-2k]$$
$$C=\{x+2k \mid x\in A\}=[1+2k\ ,\ 10+2k]$$

اشتراک این دو بازه در دو حالت تهی است:

$$I)\ 10-2k<2k+1\Rightarrow k>\frac{9}{4}$$

$$II)\ 10+2k<1-2k\Rightarrow k<-\frac{9}{4}$$

بنابراین اگر $k\in[-\frac{9}{4}\ ,\ \frac{9}{4}]$ باشد، اشتراک B و C ناتهی است و داریم:

$$b-a=(\frac{9}{4})-(-\frac{9}{4})=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}=4/5$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۳ تا ۵)

۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(داود بوالحسنی)*

روش اول:

A : دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند

B : دانش‌آموزانی که والیبال بازی می‌کنند

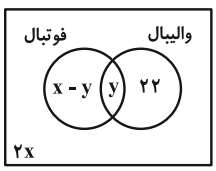
حال با توجه به نمادگذاری بالا، فرضیات مسئله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} n(U)=112 & (1)\\ n(B-A)=22=n(B)-n(A\cap B) & (2)\\ n(A)=\frac{1}{2}n\big((A\cup B)'\big)=\frac{1}{2}\big(n(U)-(n(A)+n(B)-n(A\cap B))\big) & (3)\\ n(B')=4n(A-B)=4\big(n(A)-n(A\cap B)\big) & (4)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} n(A)=\frac{1}{2}\big(112-(n(A)+22)\big)$$
$$\Rightarrow 3n(A)=90\Rightarrow n(A)=30$$
$$\xrightarrow{(4)} n(B')=n(U)-n(B)=4n(A)-4n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(U)=4n(A)+\overbrace{n(B)-n(A\cap B)}^{22}-3n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow 112=120+22-3n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow 3n(A\cap B)=30\Rightarrow n(A\cap B)=10$$

روش دوم: به کمک نمودار ون، مسئله را حل می‌کنیم:

۱۱۲ : مدرسه



$2x$: تعداد دانش‌آموزانی که نه فوتبال و نه والیبال بازی می‌کنند.

y : تعداد دانش‌آموزانی که هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

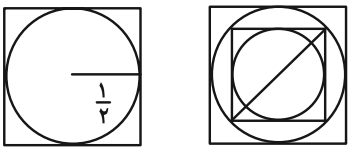
$x-y$: تعداد دانش‌آموزانی که فقط فوتبال بازی می‌کنند.

$$2x+(x-y)=4(x-y)\Rightarrow 3x-y=4x-4y\Rightarrow x=3y$$
$$(2x)+(x-y)+y+22=112$$
$$\Rightarrow 3x=90\Rightarrow x=30\xrightarrow{x=3y}y=10$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

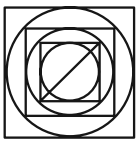
۱۳- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

طول شعاع دایره در مرحلهٔ اول برابر $\frac{1}{2}$ است.



$$\text{قطر دایرهٔ بزرگ‌تر}=1=\text{طول قطر مربع کوچک‌تر}$$
$$\Rightarrow \text{طول ضلع مربع کوچک‌تر}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \text{طول شعاع دایرهٔ کوچک‌تر}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

به همین ترتیب:



$$\text{طول قطر مربع سوم}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \text{طول ضلع مربع سوم}=\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \text{طول شعاع دایرهٔ سوم}=\frac{1}{4}$$

$$\overset{(1)}{r_1}=\frac{1}{2}\quad \overset{(2)}{r_2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\quad \overset{(3)}{r_3}=\frac{1}{4}\quad \dots\quad \overset{(n)}{r_n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$$
$$\Rightarrow r_9=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})^8=\frac{1}{32}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۰ و ۲۵ تا ۲۷)

۱۴- **گزینهٔ «۳»** *(محمدرضا راسخ)*

با توجه به رابطهٔ مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی داریم:

$$\frac{14}{2}(2a_1+13d)=\frac{16}{2}(2a_1+15d)$$

@master_Azmon

$$\Rightarrow 14a_1+91d=16a_1+120d$$

$$\Rightarrow 2a_1+29d=0\Rightarrow a_1+a_{30}=0$$

$$\Rightarrow \frac{30}{2}(a_1+a_{30})=0\Rightarrow S_{30}=0$$

(حسابان ۱- جبر و معادله؛ صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱۵- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا کشاورزی)

$$x\ ,2\ ,y \xrightarrow{\text{سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی}} \frac{x+y}{2}=2$$

$$\Rightarrow x+y=4\Rightarrow y=4-x \qquad (*)$$

$$x-1\ ,2\ ,y+1 \xrightarrow{\text{سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی}}$$

$$(x-1)(y+1)=4 \xrightarrow{(*)} (x-1)(5-x)=4$$

$$\Rightarrow x^2-6x+9=0\Rightarrow (x-3)^2=0\Rightarrow x=3$$

$$\left.\begin{array}{l}1\ ,2\ ,3: \text{ جملات دنبالهٔ حسابی}\Rightarrow d=-1\\ 2\ ,2\ ,2: \text{ جملات دنبالهٔ هندسی}\Rightarrow q=1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow q-d=1-(-1)=2$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۱۶- **گزینهٔ «۴»** (جهانبخش نیکنام)

فرض می‌کنیم قدرنسبت دنبالهٔ حسابی k باشد:

$$a\ ,c\ ,d \xrightarrow{\text{تشکیل دنبالهٔ هندسی}} c^2=ad$$

$$\Rightarrow (a+2k)^2=a(a+3k)\Rightarrow ak+4k^2=0$$

$$\Rightarrow k(a+4k)=0\Rightarrow \begin{cases}k=0 & \text{غ ق ق}\\ k=-\frac{a}{4}\end{cases}$$

$$\frac{a+b+c+d+e}{a+c+d}=\frac{a+\frac{3}{4}a+\frac{2}{4}a+\frac{1}{4}a+0}{a+\frac{2}{4}a+\frac{1}{4}a}=\frac{\frac{10}{4}a}{\frac{7}{4}a}=\frac{10}{7}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۱۷- **گزینهٔ «۳»** (محمدرضا راسخ)

فرض می‌کنیم a_n جملهٔ nام دنبالهٔ هندسی مذکور و q قدرنسبت آن باشد:

$$\frac{a_6}{a_3}=\frac{a_9}{a_6}=q^3\Rightarrow a_6^2=a_3\times a_9$$

$$\Rightarrow [x]^2=4[x-1]\Rightarrow [x]^2=4[x]-4$$

$$\Rightarrow [x]^2-4[x]+4=0\Rightarrow ([x]-2)^2=0$$

$$\Rightarrow [x]=2\Rightarrow 2\le x<3$$

$$\Rightarrow a+2b=2+2(3)=8$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱۸- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا نداف‌زاده)

فرض می‌کنیم a_n جملهٔ nام این دنباله و d قدرنسبت آن باشد، با توجه به فرضیات مسئله داریم:

$$\begin{cases}a_2\cdot a_{12}=1\\ a_4\cdot a_{10}=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a_1+d)(a_1+11d)=1\\ (a_1+3d)(a_1+9d)=5\end{cases}$$

از طرفی داریم $a_7=a_1+6d$ پس $a_1=a_7-6d$، در نتیجه:

$$\begin{cases}(a_7-5d)(a_7+5d)=1\\ (a_7-3d)(a_7+3d)=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_7^2-25d^2=1\\ a_7^2-9d^2=5\end{cases}$$

$$\Rightarrow 16d^2=4\Rightarrow d^2=\frac{1}{4}\Rightarrow a_7^2-\frac{25}{4}=1$$

$$\Rightarrow a_7^2=\frac{29}{4}\Rightarrow a_7=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۱۹- **گزینهٔ «۳»** (میلاد منصوری)

با فرض $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ و $b=2-\sqrt{3}$ داریم:

$$a=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$b=2-\sqrt{3}\Rightarrow 2b=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2\Rightarrow b=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$$

بنابراین داریم:

$$a^3b^2=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)^3(\sqrt{3}-1)^4}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left((\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\right)^3(\sqrt{3}-1)}{2}=\frac{\sqrt{2}(2^3)(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$=\frac{8\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}=4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)=4(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۲۰- **گزینهٔ «۱»** (میلاد منصوری)

با افزودن یک واحد به فرض مسئله داریم:

$$x+1+\frac{4}{x+1}=4+4\sqrt{3} \qquad (*)$$

حال فرض کنید $A=\sqrt{x+1}+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ باشد، اولاً $A>0$ و داریم:

$$A^2=x+1+\frac{4}{x+1}+4\xrightarrow{(*)}4+4\sqrt{3}+4=A^2$$

$$\Rightarrow 8+2\sqrt{12}=A^2\Rightarrow(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2=A^2$$

$$\xrightarrow{A>0} A=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

@master_Azmon

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۱»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض سؤال می‌دانیم:

$$AB-BC=BD\Rightarrow AB=BD+BC$$
$$\Rightarrow AB=B(D+C) \qquad (۱)$$

از طرفین تساوی (۱) دترمینان می‌گیریم:

$$|AB|=|B(D+C)|\Rightarrow|A||B|=|B||D+C| \qquad (۲)$$

از آنجا که $|B|\neq ۰$ است (چرا؟)، آن را از طرفین تساوی (۲) ساده کرده و خواهیم داشت: $|A|=|D+C|$

ماتریس $D+C$ را محاسبه کرده و دترمینان آن را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$D+C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۲\\ ۳ & ۲ & ۵\end{bmatrix}$$

$$|D+C|=۱\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}۱ & ۳\\ ۳ & ۲\end{vmatrix}=۱\times۱\times(۲-۹)=-۷$$

$$\Rightarrow|A|=|D+C|=-۷$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۲۲- **گزینهٔ «۴»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق تمرین ۸ صفحهٔ ۳۱ کتاب درسی، در محاسبهٔ دترمینان یک ماتریس مربعی دلخواه، می‌توان از یک عدد دلخواه در یک سطر یا ستون دلخواه فاکتور گرفته و به صورت ضریبی در کنار دترمینان قرار بدهیم؛ بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix}۶ & ۱ & ۸\\ ۱۸ & ۴ & ۸\\ ۶a & ۰ & ۸\end{vmatrix}\xrightarrow[\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم.}]{\text{در سطر دوم و سوم}}۲\times۲\times\begin{vmatrix}۶ & ۱ & ۸\\ ۹ & ۲ & ۴\\ ۳a & ۰ & ۴\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{ستون سوم از ۴ فاکتور می‌گیریم.}]{\text{در ستون اول از ۳ و در}}۲\times۲\times۳\times۴\underbrace{\begin{vmatrix}۲ & ۱ & ۲\\ ۳ & ۲ & ۱\\ a & ۰ & ۱\end{vmatrix}}_{k}=۴۸k$$

(هندسه ۳- صفحهٔ ۳۱)

۲۳- **گزینهٔ «۲»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

دترمینان ماتریس A را با دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & x\\ x & ۰ & ۱\end{vmatrix}\begin{matrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\\ x & ۰\end{matrix}\Rightarrow|A|=(۰+x^۲+۰)-(۰+۰+۱)=x^۲-۱$$

طبق فرض داریم $x^۲-۱=۸$، بنابراین $x^۲=۹$ و در نتیجه:

$$\log_۳^{x^۲}=\log_۳^۹=۲$$

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۹)

۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(اسحاق اسفندیار)*

ابتدا ماتریس A را حساب کرده و سپس دترمینان آن را به دست می‌آوریم:

$$۲A=\begin{bmatrix}|A| & ۲\\ -۲ & |A|\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{|A|}{۲} & ۱\\ -۱ & \frac{|A|}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow|A|=\frac{|A|}{۲}\times\frac{|A|}{۲}+۱\Rightarrow|A|^۲-۴|A|+۴=۰$$

$$\Rightarrow(|A|-۲)^۲=۰\Rightarrow|A|=۲$$

همچنین می‌توانیم دترمینان ماتریس B را برحسب سطر دوم محاسبه کنیم:

$$|B|=۱\times(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}=۱\times۱\times(۳-۱)=۲$$

با استفاده از خواص دترمینان خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\left|-|A|B^{-۱}\right|\xrightarrow[k\in\mathbb{R},\ B_{۳\times۳}]{|kB|=k^۳|B|}=(-|A|)^۳|B^{-۱}|$$

$$\xrightarrow{|B^{-۱}|=\frac{۱}{|B|}}=(-|A|)^۳\times\frac{۱}{|B|}=(-۲)^۳\times\frac{۱}{۲}=-۴$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷، ۲۸ و ۳۱)

۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

طرفین تساوی داده شده را محاسبه کرده و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix}۳ & ۱۱ & -۹\\ ۰ & -۷ & ۳\\ a & ۱ & -۴\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۵ & a\\ ۱۰ & ۱۱\end{vmatrix}\Rightarrow۳\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}-۷ & ۳\\ ۱ & -۴\end{vmatrix}$$

$$+a\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix}۱۱ & -۹\\ -۷ & ۳\end{vmatrix}=۵۵-۱۰a$$

$$\Rightarrow۳\times۱\times(۲۸-۳)+a\times۱\times(۳۳-۶۳)=۵۵-۱۰a$$

$$\Rightarrow۷۵-۳۰a=۵۵-۱۰a\Rightarrow a=۱$$

خواستهٔ سؤال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix}a & ۱-a\\ ۲a & a+۱\end{vmatrix}\overset{a=۱}{=\!=}\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۲\end{vmatrix}=۱\times۲-۰\times۲=۲$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(فرشاد صدیقی‌فر)*

با استفاده از خواص دترمینان طرفین تساوی داده شده را تا جای ممکن ساده می‌کنیم:

$$۲|A|=\left||A|A\right|+\left|\frac{۱}{|A|}A\right|\xrightarrow[k\in\mathbb{R},\ A_{۳\times۳}]{|kA|=k^۳|A|}$$

$$۲|A|=(|A|)^۳|A|+(\frac{۱}{|A|})^۳|A|$$

@master_Azmon

$$\Rightarrow ۲|A|=|A|^۴+\frac{۱}{|A|^۲}\xrightarrow{\times|A|^۲}۲|A|^۳=|A|^۶+۱$$

$$\Rightarrow |A|^۶-۲|A|^۳+۱=۰\Rightarrow (|A|^۳-۱)^۲=۰$$

$$\Rightarrow |A|^۳=۱\Rightarrow |A|=۱$$

(هندسه ۳- صفحهٔ ۳۱)

۲۷- **گزینهٔ «۱»** (کیوان دارابی)

سمت چپ تساوی را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} x & y & ۲\\ ۴ & -۱ & ۲\\ ۱ & ۵ & ۳\end{vmatrix}=x\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۵ & ۳\end{vmatrix}+y\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}۴ & ۲\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}$$

$$+۲\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۵ & ۳\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}۴ & ۲\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}+۲\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}\quad (*)$$

از مقایسهٔ (*) با سمت راست تساوی صورت سؤال درمی‌یابیم که k همان $۲\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}$ است؛ بنابراین:

$$k=۲\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & ۵\end{vmatrix}=۲(۲۰+۱)=۴۲$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۲۸- **گزینهٔ «۳»** (مجتبی مظاهری‌فر)

ماتریس B را تشکیل داده و دترمینان آن را برحسب سطر دوم به دست می‌آوریم:

$$B=\begin{bmatrix}۲ & x-۱ & -۳\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۴ & ۲x+۱ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=۲\times(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix}۲ & -۳\\ ۴ & ۳\end{vmatrix}$$

$$=۲\times۱\times(۶+۱۲)=۳۶$$

دترمینان ماتریس A را نیز برحسب سطر اول به دست می‌آوریم:

$$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۲x & ۳\end{vmatrix}+x\times(-۱)^{۱+۲}\times\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{vmatrix}$$

$$+(-۱)\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۲x\end{vmatrix}$$

$$=۲(۶-۲x)-x(-۳-۲)-(-۲x-۴)=۳x+۱۶$$

از تساوی $|A|=|B|$ نتیجه می‌شود:

$$۳x+۱۶=۳۶\Rightarrow ۳x=۲۰\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۳}$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۲۹- **گزینهٔ «۲»** (نیما مهندس)

دترمینان ماتریس داده شده را با دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱+\sin\theta & ۱ & ۱ & ۱+\sin\theta\\ ۱ & ۱ & ۱+\cos\theta & ۱ & ۱\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \big((۱+\sin\theta)(۱+\cos\theta)+۱+۱\big)-\big((۱+\sin\theta)+۱+(۱+\cos\theta)\big)$$

$$\Rightarrow (\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+۳)-(\sin\theta+\cos\theta+۳)$$

$$=\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲}\sin۲\theta\xrightarrow{-۱\le\sin۲\theta\le۱}-\frac{۱}{۲}\le\frac{۱}{۲}\sin۲\theta\le\frac{۱}{۲}$$

طبق نامساوی به دست آمده، بیشترین مقدار ممکن دترمینان داده شده $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۹)

۳۰- **گزینهٔ «۳»** (هومن عقیلی)

طبق فرض سؤال داریم: $A^۲-A-I=\bar{O}\Rightarrow A^۲=A+I$

از طرفین رابطهٔ اخیر، دترمینان می‌گیریم:

$$|A+I|=|A^۲|=|A|^۲=(-۱)^۲=۱$$

با فرض $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ داریم:

$$|A|=-۱\Rightarrow\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-۱\Rightarrow ad-bc=-۱\qquad (۱)$$

$$|A+I|=۱\Rightarrow\begin{vmatrix}a+۱ & b\\ c & d+۱\end{vmatrix}=۱$$

$$\Rightarrow ad+a+d+۱-bc=۱\xrightarrow{ad-bc=-۱}a+d=۱\qquad (۲)$$

دترمینان ماتریس مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|A+۲I|=\begin{vmatrix}a+۲ & b\\ c & d+۲\end{vmatrix}=ad+۲(a+d)+۴-bc$$

$$\xrightarrow{(۱),\,(۲)}=-۱+۲+۴=۵$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

@master_Azmon

ریاضیات گسسته

۳۱- **گزینهٔ «۳»** *(علی ایمانی)*

از آنجا که عدد $\overline{ab۳۲۱}$ مضرب ۹۹ است، بنابراین هم مضرب ۹ و هم مضرب ۱۱ است. با توجه به قاعدهٔ تقسیم بر اعداد ۹ و ۱۱ در صفحه‌های ۲۲ و ۲۳ کتاب درسی، داریم:

$$\overline{ab۳۲۱}\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow ۱-۲+۳-b+a\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow a-b\overset{۱۱}{\equiv}-۲ \xrightarrow{-۹<a-b\leq ۹} a-b=-۲\,,۹$$

$$\overline{ab۳۲۱}\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow ۱+۲+۳+a+b\overset{۹}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow a+b\overset{۹}{\equiv}-۶\overset{۹}{\equiv}۳ \xrightarrow{۰<a+b\leq ۱۸} a+b=۳\,,۱۲$$

با بررسی حالت‌های ممکن برای عبارت‌های $a+b$ و $a-b$، مقادیر طبیعی قابل قبول برای a و b را می‌یابیم:

$a+b=۳\,,\ a-b=-۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\,,\ b=\frac{۵}{۲}$	غ ق ق
$a+b=۳\,,\ a-b=۹\Rightarrow a=۶\,,\ b=-۳$	غ ق ق
$a+b=۱۲\,,\ a-b=-۲\Rightarrow a=۵\,,\ b=۷$	ق ق
$a+b=۱۲\,,\ a-b=۹\Rightarrow a=\frac{۲۱}{۲}\,,\ b=\frac{۳}{۲}$	غ ق ق

تنها مقادیر طبیعی قابل قبول $a=۵$ و $b=۷$ می‌باشند، بنابراین مقدار $۲a+b$ برابر ۱۷ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۳۲- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

دو عدد وقتی رقم یکان یکسانی دارند که به پیمانهٔ ۱۰ هم‌نهشت باشند، بنابراین داریم:

$$a^۲-۳a\overset{۱۰}{\equiv}a+۲ \Rightarrow a^۲-۴a-۲\overset{۱۰}{\equiv}۰ \xrightarrow{۱۰\equiv ۰} \overset{۱۰}{}$$

$$a^۲-۴a-۱۲\overset{۱۰}{\equiv}۰ \Rightarrow (a-۶)(a+۲)\overset{۱۰}{\equiv}۰ \qquad (*)$$

دو عدد $(a-۶)$ و $(a+۲)$ که ۸ واحد اختلاف دارند، یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد؛ از رابطهٔ همنهشتی (*) نتیجه می‌گیریم که هر دو عدد فوق، زوج هستند، یعنی a نیز زوج می‌باشد. از طرفی زمانی حاصل‌ضرب این دو عدد مضرب ۵ می‌شود که یکی از آن‌ها مضرب ۵ باشد:

$$\begin{cases} a-۶\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow a\overset{۵}{\equiv}۶ \xrightarrow{a\ \text{زوج}} a=۶\,,۱۶\,,\ldots \\ a+۲\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow a\overset{۵}{\equiv}-۲ \xrightarrow{a\ \text{زوج}} a=۸\,,۱۸\,,\ldots \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a برابر ۱۶ و بزرگ‌ترین عدد طبیعی یک رقمی a برابر ۸ بوده و نسبت خواسته شده برابر $\frac{۱۶}{۸}=۲$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۲۳)

۳۳- **گزینهٔ «۴»** *(مصطفی دیداری)*

از آنجا که روزهای هفته هر ۷ روز یکبار تکرار می‌شوند، می‌توان فاصلهٔ بین دو تاریخ دور از هم را به پیمانهٔ ۷ کوچک کرد. (*)

حال باید بررسی کنیم که ۱۲ بهمن، چند روز بعد از ۱۷ شهریور است:

$$(۳۱-۱۷)+۴\times ۳۰+۱۲=۱۴۶ \xrightarrow{(*)} ۱۴۶\overset{۷}{\equiv}۶$$

این بدان معناست که ۱۲ بهمن از نظر روز هفته، ۶ روز بعد از ۱۷ شهریور است؛ بنابراین ۱۲ بهمن به‌طور حتم چهارشنبه یا پنجشنبه نمی‌تواند باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۲۴)

۳۴- **گزینهٔ «۳»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض می‌دانیم: $۱۴۰۳x\overset{۷}{\equiv}۲۰۲۴ \Rightarrow ۱۴۰۰x+۳x\overset{۷}{\equiv}۲۰۲۳+۱$

$$\Rightarrow ۳x\overset{۷}{\equiv}۱\overset{۷}{\equiv}۱۵ \xrightarrow[(۳\,,\,۷)=۱]{\div ۳} x\overset{۷}{\equiv}۵$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x\overset{۷}{\equiv}۵ \\ ۲۰۲۴\overset{۷}{\equiv}۱ \end{cases} \Rightarrow ۲۰۲۴x\overset{۷}{\equiv}۱\times ۵\overset{۷}{\equiv}۵$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۳۵- **گزینهٔ «۳»** *(سوگند روشنی)*

نکته: معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ به ازای مقادیر صحیح a و b دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a\,,\,m)\,|\,b$.

فرض می‌کنیم $d=(۱۷n+۱۱\,,\,۷n+۲)$؛ آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} d\,|\,۱۷n+۱۱ \xrightarrow{\times ۷} d\,|\,۱۱۹n+۷۷ \\ d\,|\,۷n+۲ \xrightarrow{\times ۱۷} d\,|\,۱۱۹n+۳۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d\,|\,۴۳ \Rightarrow d=۱ \ \text{یا}\ ۴۳$$

به ازای $d=۱$ داریم $۱\,|\,۸۰$ و بنابراین معادله دارای جواب است؛ ولی به ازای $d=۴۳$ معادله جوابی ندارد (چرا؟). حال مقادیری از n را می‌یابیم که $d=۴۳$ می‌شود:

$$\begin{cases} ۴۳\,|\,۷n+۲ \xrightarrow{\times ۶} ۴۳\,|\,۴۲n+۱۲ \\ ۴۳\,|\,۴۳n \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۴۳\,|\,n-۱۲ \Rightarrow n=۴۳k+۱۲$$

$$\Rightarrow n=۱۲\,,۵۵\,,۹۸ \qquad \text{(نامطلوب)}$$

در نتیجه به ازای $۸۷=۳-۹۰$ مقدار دو رقمی n، معادلهٔ هم‌نهشتی داده شده، در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

@master_Azmon

۳۶- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

از مجموعه جواب x که به صورت $\{\dots,19,6,-7,-20,\dots\}$ است، نتیجه می‌شود که x به صورت $13k+6 \quad (k\in\mathbb{Z})$ می‌باشد. از طرفی طبق فرض داریم:

$$ax-1\overset{13}{\equiv}2 \Rightarrow ax\overset{13}{\equiv}3 \Rightarrow a(13k+6)\overset{13}{\equiv}3$$

$$\Rightarrow 13ak+6a\overset{13}{\equiv}3 \Rightarrow 6a\overset{13}{\equiv}3 \Rightarrow 6a\overset{13}{\equiv}42$$

$$\xrightarrow[(6,13)=1]{\div 6} a\overset{13}{\equiv}7$$

بنابراین a به صورت $13k'+7 \quad (k'\in\mathbb{Z})$ می‌باشد و بزرگ‌ترین مقدار دو رقمی a به صورت $13\times7+7=98$ بوده و مجموع ارقام آن برابر $9+8=17$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۳۷- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

ابتدا فرم کلی اعدادی را پیدا می‌کنیم که ۵ برابر آن‌ها به علاوه ۹، بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$$5a+9\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow 5a\overset{11}{\equiv}-9 \Rightarrow 5a\overset{11}{\equiv}-20$$

$$\xrightarrow[(5,11)=1]{\div 5} a\overset{11}{\equiv}-4 \Rightarrow a=11k-4 \quad (k\in\mathbb{Z})$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a، به ازای $k=9$ به دست می‌آید:

$$a=11k-4 \xrightarrow{k=9} a=11\times9-4=95$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=9+5=14$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۳۸- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض داریم:

$$\overline{xyx}\overset{30}{\equiv}1 \Rightarrow 100x+10y+x\overset{30}{\equiv}1 \Rightarrow 101x+10y\overset{30}{\equiv}1$$

نکته: اگر k مقسوم‌علیه طبیعی (و بزرگ‌تر از یک) عدد طبیعی n باشد و داشته باشیم $x\overset{n}{\equiv}y$، آن‌گاه با استفاده از تعریف هم‌نهشتی ثابت می‌شود: $x\overset{k}{\equiv}y$

از آنجا که ۵ و ۶ مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۰ هستند، پس:

$$\begin{cases} 101x+10y\overset{5}{\equiv}1 \Rightarrow x\overset{5}{\equiv}1 \xrightarrow{0<x\le9} x=1,6 & (1) \\ 101x+10y\overset{6}{\equiv}1 \Rightarrow 5x+4y\overset{6}{\equiv}1 & (2) \end{cases}$$

از عبارت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} x=1 \xrightarrow{(2)} 5+4y\overset{6}{\equiv}1 \Rightarrow 4y\overset{6}{\equiv}-4\overset{6}{\equiv}8 \Rightarrow y\overset{3}{\equiv}2 \\ \xrightarrow{0\le y\le9} y=2,5,8 \Rightarrow \overline{xyx}=121,151,181 \\ x=6 \xrightarrow{(2)} 30+4y\overset{6}{\equiv}1 \Rightarrow 4y\overset{6}{\equiv}1 \end{cases}$$

(معادله در $\mathbb{Z}$ فاقد جواب است.)

بنابراین بزرگ‌ترین عدد سه رقمی ۱۸۱ و کوچک‌ترین عدد سه رقمی ۱۲۱ می‌باشد و اختلاف این دو عدد برابر ۶۰ است.

توجه: معادلهٔ همنهشتی $4y\overset{6}{\equiv}1$ به دلیل این‌که $1 \not| (6,4)$، فاقد جواب است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۳۹- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهروی)*

طبق فرض می‌دانیم:

$$x^2-16x+63\overset{9}{\equiv}0 \Rightarrow (x-7)(x-9)\overset{9}{\equiv}0$$

اختلاف دو عدد $(x-9)$ و $(x-7)$ برابر با ۲ است، از این‌رو هر دو عدد فوق نمی‌توانند همزمان مضرب ۳ باشند، بنابراین باید یکی از این دو عدد مضرب ۹ باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} x-7\overset{9}{\equiv}0 \Rightarrow x=9k+7=3(3k+2)+1=3k'+1 \\ x-9\overset{9}{\equiv}0 \Rightarrow x=9k'' \end{cases}$$

بنابراین x نمی‌تواند به صورت $3k+2$ باشد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

طبق فرض می‌دانیم:

$$\overline{aba}\overset{33}{\equiv}0 \Rightarrow 100a+10b+a\overset{33}{\equiv}0 \Rightarrow 10b+2a\overset{33}{\equiv}0$$

$$\xrightarrow[(2,33)=1]{\div 2} 5b+a\overset{33}{\equiv}0 \qquad (*)$$

از طرفی می‌دانیم که عبارت $5b+a$ حداقل برابر ۱ و حداکثر برابر ۵۴ است (چرا؟). با در نظر گرفتن رابطهٔ (*) درمی‌یابیم که تنها حالت $5b+a=33$ ممکن است، بنابراین داریم:

$$5b+a=33 \Rightarrow \begin{cases} b=5 \ , \ a=8 \Rightarrow \overline{aba}=858 \\ b=6 \ , \ a=3 \Rightarrow \overline{aba}=363 \end{cases}$$

در نتیجه دو مقدار سه رقمی طبیعی ۳۶۳ و ۸۵۸ برای $\overline{aba}$ یافت می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

@master_Azmon

آمار و احتمال

۴۱- **گزینهٔ «۳»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق فرض داریم:

$$A'-(A-B)=B-A \Rightarrow A'-(A\cap B')=B\cap A'$$
$$\Rightarrow A'\cap(A\cap B')'=B\cap A'$$
$$\Rightarrow A'\cap(A'\cup B)=B\cap A' \qquad (*)$$

طبق قانون جذب در مجموعه‌ها داریم:

$$X\cap(X\cup Y)=X \xrightarrow{(*)} \underbrace{A'\cap(A'\cup B)}_{A'}=A'\cap B$$
$$\Rightarrow A'-(A'\cap B)=\varnothing \Rightarrow A'\cap(A'\cap B)'=\varnothing$$
$$\Rightarrow A'\cap(A\cup B')=\varnothing$$
$$\Rightarrow (\underbrace{A'\cap A}_{\varnothing})\cup(A'\cap B')=\varnothing \Rightarrow A'\cap B'=\varnothing$$
$$\Rightarrow (A\cup B)'=\varnothing \Rightarrow A\cup B=\varnothing'=U$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۸ و ۲۱ تا ۲۹)

۴۲- **گزینهٔ «۲»** *(افشین خاصه‌خان)*

ابتدا تمامی جواب‌های این معادله را به دست می‌آوریم:

$$(x^2-3)(2x^2+5x+2)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ 2x^2+5x+2=0 \Rightarrow x=-2\ ,\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای ریشه‌های این معادله، اگر مجموعهٔ A برابر مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ انتخاب شود، مجموعه جواب این گزاره‌نما فقط یک عضو خواهد داشت.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۳ و ۴)

۴۳- **گزینهٔ «۳»** *(افشین خاصه‌خان)*

نکته: برای دو مجموعهٔ دلخواه A و B، اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ باشد، آن‌گاه $n(A\times B)=mk$ می‌باشد.

$n(A\times B)=45$، پس $n(A)$ مقسوم‌علیه طبیعی عدد ۴۵ است. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A برابر $2^{n(A)}$ است که با توجه به گزینه‌ها داریم:

غ ق ق $64=2^6 \Rightarrow n(A)=6$

ق ق $512=2^9 \Rightarrow n(A)=9$

ق ق $8=2^3 \Rightarrow n(A)=3$

ق ق $32=2^5 \Rightarrow n(A)=5$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۷ و ۳۰)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(علی ایمانی)*

می‌دانیم اگر نقیض گزاره‌ای درست باشد، خود گزاره نادرست می‌شود، پس گزینهٔ نادرست را می‌یابیم:

۱) به ازای هر عدد حقیقی ناصفر مانند x، عددی حقیقی مانند y وجود دارد که حاصل‌ضرب آن‌ها ۱ باشد. این گزارهٔ سوری، دو عدد معکوس را تعریف می‌کند و کاملاً صحیح می‌باشد.

۲) عددی حقیقی مانند x وجود دارد که حاصل جمع آن با هر عدد حقیقی y، برابر y باشد. این گزارهٔ سوری، عدد صفر را تعریف می‌کند و کاملاً صحیح می‌باشد.

۳) عددی حقیقی مانند x وجود دارد که حاصل‌ضرب آن در هر عدد حقیقی y، برابر y باشد. این گزارهٔ سوری، عدد ۱ را تعریف می‌کند و کاملاً صحیح می‌باشد.

۴) عدد حقیقی ناصفری مانند x وجود دارد که حاصل‌ضرب آن در هر عدد حقیقی y، برابر ۱ باشد. این گزارهٔ سوری مثال نقض دارد و صحیح نمی‌باشد. (به ازای $y=0$، هیچ عددی مثل x وجود ندارد که $xy=1$.)

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۴۵- **گزینهٔ «۱»** *(کیوان دارابی)*

نکته: طبق سؤال ۱ کار در کلاس صفحهٔ ۸ کتاب درسی می‌دانیم:

$$p\Rightarrow q \equiv \sim p\vee q$$

طبق فرض داریم:

$$(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q) \xrightarrow{\text{نکته}} \sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)$$
$$\overset{(*)}{\equiv}(\sim p\wedge\sim q)\vee(p\wedge q)\equiv p\Leftrightarrow q$$

اثبات هم‌ارزی $(*)$ به صورت زیر است:

$$(\sim p\wedge\sim q)\vee(p\wedge q)\equiv[(\sim p\wedge\sim q)\vee p]\wedge[(\sim p\wedge\sim q)\vee q]$$
$$\equiv[(\underbrace{\sim p\vee p}_{T})\wedge(\sim q\vee p)]\wedge[(\sim p\vee q)\wedge(\underbrace{\sim q\vee q}_{T})]$$
$$\equiv(\sim q\vee p)\wedge(\sim p\vee q)\equiv(q\Rightarrow p)\wedge(p\Rightarrow q)\equiv p\Leftrightarrow q$$

نادرستی سایر گزینه‌ها را توسط جدول ارزش درستی گزاره‌ها بررسی کنید.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۴ تا ۱۱)

۴۶- **گزینهٔ «۲»** *(مصطفی دیداری)*

نکته: اگر مجموعهٔ A، n عضو داشته باشد، تعداد عضوهای مجموعهٔ توانی A یا $P(A)$ برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A، یعنی 2^n بوده و همچنین مجموعهٔ A دارای 2^n-1 زیرمجموعهٔ سره (نامساوی با خود A) خواهد بود.

@master_Azmon

فرض می‌کنیم مجموعهٔ A دارای $k+2$ عضو و مجموعهٔ B دارای k عضو می‌باشد؛ حال داریم:

$$۲^{k+۲}-(۲^k-۱)=۴۹ \Rightarrow ۲^{k+۲}-۲^k=۴۸$$

$$\Rightarrow ۲^k(۲^۲-۱)=۴۸ \Rightarrow ۲^k=۱۶ \Rightarrow k=۴$$

پس A دارای ۶ عضو و $A\cap B$ دارای ۳ عضو می‌باشد. از طرفی می‌دانیم که $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$ (چرا؟)، بنابراین داریم:

$$n(P(A)\cap P(B))=n(P(A\cap B))=۲^۳=۸$$

(آمار و احتمال- صفحهٔ ۱۷)

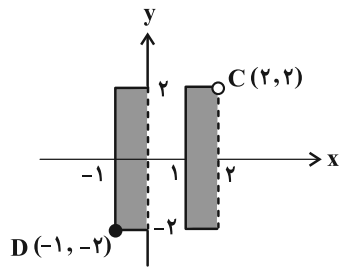
۴۷- **گزینهٔ «۳»** *(مصطفی دیداری)*

ابتدا مجموعهٔ A را بازنویسی و ساده می‌کنیم:

$$|[x]|=۱ \Rightarrow \begin{cases}[x]=۱ \Rightarrow ۱\le x<۲\\ [x]=-۱ \Rightarrow -۱\le x<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=[-۱,۰)\cup[۱,۲)$$

سپس با توجه به مجموعه‌های A و B، نمودار $A\times B$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار مشخص است که دورترین نقاط مجموعهٔ $A\times B$ نسبت به یکدیگر، نقاط C و D هستند؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که فاصلهٔ هر دو نقطه دلخواه روی مجموعهٔ $A\times B$، قطعاً کوچک‌تر از طول پاره‌خط CD می‌باشد.

$$a=CD=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۲+۲)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴۸- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهدوی)*

موارد (الف) تا (پ) را ساده و بررسی می‌کنیم:

(الف) $((p\Rightarrow\sim r)\Rightarrow q)\vee(q\Rightarrow\sim p)$

$$\equiv((T\Rightarrow F)\Rightarrow F)\vee(F\Rightarrow F)$$

$$\equiv(F\Rightarrow F)\vee(F\Rightarrow F)\equiv T\vee T\equiv T$$

(ب) $((p\Leftrightarrow r)\Rightarrow\sim q)\wedge(\sim p\vee q)$

$$\equiv((T\Leftrightarrow T)\Rightarrow T)\wedge(F\vee F)$$

$$\equiv(T\Rightarrow T)\wedge F\equiv T\wedge F\equiv F$$

(پ) $((r\Rightarrow q)\Rightarrow p)\wedge(q\Rightarrow(p\vee r))$

$$\Rightarrow((T\Rightarrow F)\Rightarrow T)\wedge(F\Rightarrow(T\vee T))$$

$$\equiv(F\Rightarrow T)\wedge(F\Rightarrow T)\equiv T\wedge T\equiv T$$

بنابراین، ارزش گزاره‌های (الف) و (پ) درست و ارزش گزارهٔ (ب) نادرست می‌باشد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲ تا ۱۱)

۴۹- **گزینهٔ «۲»** *(نیلوفر مهدوی)*

نکته: طبق قانون جذب در مجموعه‌ها می‌دانیم: $\begin{cases}A\cup(A\cap C)=A\\ A\cap(A\cup C)=A\end{cases}$

حال عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\big(((A\cup C)-C')\cap(B\cup C')\big)\cup((B-C)\cup C')$$

$$=\left(\underbrace{((A\cup C)\cap C)}_{\text{(جذب) }C}\cap(B\cup C')\right)\cup\left(\underbrace{(B\cap C')\cup C'}_{\text{(جذب) }C'}\right)$$

$$=\big(C\cap(B\cup C')\big)\cup C'=\left((C\cap B)\cup(\underbrace{C\cap C'}_{\varnothing})\right)\cup C'$$

$$=(C\cap B)\cup C'=(\underbrace{C\cup C'}_{U})\cap(B\cup C')=B\cup C'$$

متمم مجموعهٔ به دست آمده به صورت مقابل است:

$$(B\cup C')'=B'\cap C$$

اکنون می‌توانیم به بررسی گزینه‌ها بپردازیم:

۱) $(B'\cap C)\cup(C-B)=(B'\cap C)\cup(C\cap B')=C\cap B'$ ✗

۲) $(B'\cap C)\cup(B'\cap C')=B'\cap(C\cup C')$

$=B'\cap U=B'$ ✓

۳) $(B'\cap C)\cup(B'\cap A')=B'\cap(A'\cup C)$ ✗

۴) $(B'\cap C)\cup C=C$ (جذب) ✗

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۹)

۵۰- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

نکته: به ازای مجموعه‌های دلخواه C و B داریم:

$$\begin{cases}(B\cap C)\subseteq B\\ B\subseteq C\Rightarrow B-C=\varnothing\end{cases}$$

با توجه به نکات بالا ثابت می‌شود که گزینهٔ دوم الزاماً تهی می‌باشد:

$$(B\cap C)\subseteq B\Rightarrow A\times(B\cap C)\subseteq A\times B$$

$$\Rightarrow A\times(B\cap C)-A\times B=\varnothing$$

گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ به ازای $A=\{۱\}$، $B=\{۲\}$ و $C=\{۳\}$ غیرتهی می‌شوند.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲۰، ۲۵ و ۳۰ تا ۳۳)

@master_Azmon

آمار و احتمال

۵۱- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

نکته: اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های x_1 تا x_n به ترتیب برابر $\bar{x}$ و σ باشد، آن‌گاه میانگین و انحراف معیار داده‌های ax_1+b تا ax_n+b به ترتیب برابر $a\bar{x}+b$ و $|a|\sigma$ می‌شود. (*)

برای داده‌های x_1 تا x_{10} طبق فرض سؤال داریم:

$$\bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_{10}}{10}=\frac{120}{10}=12$$

داده‌های جدید به صورت $kx_1+\frac{1}{k}$, ... , $kx_{10}+\frac{1}{k}$ می‌باشند، بنابراین طبق فرض داریم:

$$\frac{CV_{\text{اولیه}}}{CV_{\text{جدید}}}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\frac{\sigma}{\bar{x}}}{\frac{\sigma'}{\bar{x}'}}=\frac{4}{3}\xrightarrow{(*)}\frac{\frac{\sigma}{12}}{\frac{k\sigma}{12k+\frac{1}{k}}}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{12k+\frac{1}{k}}{12k}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\frac{1}{k}}{12k}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{4k^2}=1\xrightarrow{k>0}k=\frac{1}{2}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۰، ۹۱ و ۹۴)

۵۲- **گزینهٔ «۴»** *(آرین تفضلی‌زاده)*

اگر انحراف معیار و میانگین حقوق اولیهٔ کارمندان σ و $\bar{x}$ باشد، انحراف معیار و میانگین حقوق ثانویه کارمندان $0/75\sigma$ و $0/75\bar{x}$ می‌شود. طبق رابطهٔ ضریب تغییرات داریم:

$$\begin{cases}CV_{\text{اولیه}}=\frac{\sigma}{\bar{x}}\\ CV_{\text{ثانویه}}=\frac{0/75\sigma}{0/75\bar{x}}=\frac{\sigma}{\bar{x}}\end{cases}\Rightarrow CV_{\text{اولیه}}=CV_{\text{ثانویه}}$$

بنابراین ضریب تغییرات داده‌ها تغییری نخواهد کرد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۰ و ۹۱)

۵۳- **گزینهٔ «۴»** *(افشین خاصه‌خان)*

با توجه به داده‌های سؤال، اختلاف میانگین در دو حالت ذکر شده برابر ۱ واحد می‌باشد، یعنی:

$$\frac{3+7+a+16+12}{5}-\frac{3+7+2a+16+12}{6}=1$$

$$\Rightarrow\frac{a+38}{5}-\frac{38+2a}{6}=1\xrightarrow{\times30}$$

$$6a+\underbrace{6\times38-5\times38}_{38}-10a=30\Rightarrow38-4a=30$$

$$\Rightarrow4a=8\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow\text{مقدار واقعی میانگین}:\ \bar{x}=\frac{3+7+2+16+12}{5}=8$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۵۴- **گزینهٔ «۲»** *(کیوان دارابی)*

چون با اضافه شدن داده‌های جدید، میانگین ثابت مانده است، پس میانگین داده‌های جدید با میانگین داده‌های قبلی برابر است. از طرفی داده‌های اضافه شده برابر هستند، بنابراین همگی با میانگین داده‌های اولیه برابرند. در نتیجه داریم:

$$\text{واریانس داده‌های اولیه}:\ \frac{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_8-\bar{x})^2}{8}=4$$

$$\Rightarrow(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_8-\bar{x})^2=32$$

$$\text{داده‌های جدید}:\ x'_1=\ldots=x'_8=\bar{x}$$

$$\text{واریانس جدید}:\ \frac{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_8-\bar{x})^2+\overbrace{(x'_1-\bar{x})^2+\ldots+(x'_8-\bar{x})^2}^{0}}{16}$$

$$=\frac{32+0}{16}=2$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۵۵- **گزینهٔ «۳»** *(نیلوفر مهروی)*

دادهٔ ۱ دارای بیشترین فراوانی است، پس مد داده‌ها برابر ۱ می‌باشد.

می‌دانیم که فراوانی هر داده برابر حاصل‌ضرب فراوانی نسبی آن داده در تعداد کل داده‌ها است؛ بنابراین داریم:

فراوانی دادهٔ ۱ : $0/5\times10=5$

فراوانی دادهٔ ۳ : $0/2\times10=2$

فراوانی دادهٔ ۴ : $0/2\times10=2$

فراوانی دادهٔ ۶ : $0/1\times10=1$

تعداد داده‌ها عددی زوج است، پس میانه برابر با میانگین داده‌های پنجم و ششم می‌باشد. دادهٔ پنجم برابر ۱ و دادهٔ ششم برابر ۳ می‌باشد و بنابراین میانهٔ کل داده‌ها برابر $\frac{3+1}{2}=2$ می‌شود. میانگین ۱۰ داده را نیز محاسبه کرده و به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$\text{میانگین}=\frac{(5\times1)+(2\times3)+(2\times4)+(1\times6)}{10}=2/5$$

۱) درست $2\times1=2$

۲) درست $2/5\times1=2/5$

۳) نادرست $2/5+2=4/5\neq5/5$

۴) درست $2+1=3$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸ و ۸۰ تا ۸۵)

۵۶- **گزینهٔ «۲»** *(نیما مهندس)*

اعدادی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۳ است، به صورت $7k+3$ نوشته می‌شوند. حال داریم:

$$7k+3:\ \text{عدد دو رقمی}\xrightarrow{k\in[10,99]}1\le k\le13$$

@master_Azmon

پس ۱۳ جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی داریم که میانگین آن‌ها همان جملهٔ وسطی است:

$$\bar{x} = ۷ \times ۷ + ۳ = ۵۲$$

نکته: برای n جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d > ۰$ داریم:

$$\text{انحراف معیار} : \sigma = \sqrt{\frac{n^۲ - ۱}{۱۲}} \times d$$

بنابراین انحراف معیار این ۱۳ عدد برابر می‌شود با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{۱۳^۲ - ۱}{۱۲}} \times ۷ = \sqrt{\frac{(۱۳-۱)(۱۳+۱)}{۱۲}} \times ۷ = ۷\sqrt{۱۴}$$

$$\Rightarrow \text{ضریب تغییرات} : CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۷\sqrt{۱۴}}{۵۲} \simeq ۰/۵$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۹۱)

۵۷- **گزینهٔ «۱»** *(فرزانه خاکپاش)*

زاویهٔ مربوط به هر گروه در نمودار دایره‌ای از رابطهٔ $\theta_i = \frac{f_i}{n} \times ۳۶۰^\circ$ محاسبه می‌شود، بنابراین داریم:

$$n = ۲۵ + ۱۳ + ۳۵ + ۴۲ + m + ۲۵ = m + ۱۴۰$$

$$۴۵^\circ = \frac{m}{m+۱۴۰} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow \frac{m}{m+۱۴۰} = \frac{۴۵^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow ۸m = m + ۱۴۰ \Rightarrow ۷m = ۱۴۰ \Rightarrow m = ۲۰$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۵۸- **گزینهٔ «۳»** *(فرزانه خاکپاش)*

ابتدا میانگین و سپس واریانس داده‌های ۳، $۴a$ و $۵a$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۵a + ۴a + ۳}{۳} = ۳a + ۱$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۲a-۱)^۲ + (a-۱)^۲ + (۲-۳a)^۲}{۳}$$

$$= \frac{۴a^۲ - ۴a + ۱ + a^۲ - ۲a + ۱ + ۴ - ۱۲a + ۹a^۲}{۳}$$

$$= \frac{۱۴a^۲ - ۱۸a + ۶}{۳} \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\sigma = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱۴a^۲ - ۱۸a + ۶}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۱۴a^۲ - ۱۸a + ۶ = ۲ \Rightarrow ۱۴a^۲ - ۱۸a + ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{صفر = مجموع ضرایب}} \begin{cases} a = ۱ \in \mathbb{Z} \\ a = \frac{۴}{۱۴} = \frac{۲}{۷} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین مقدار غیرصحیح a، برابر $\frac{۲}{۷}$ است.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۵۹- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

چون واریانس داده‌های $x_۱$ ، $x_۲$ ، $x_۳$ ، $x_۴$ برابر صفر است، پس این داده‌ها برابر یکدیگرند. با فرض $x_۱ = x_۲ = x_۳ = x_۴ = x$ داریم:

$$\bar{x} = \frac{(x+۱) + (۲x+۲) + (۳x+۳) + (۴x+۴)}{۴} = ۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰x + ۱۰}{۴} = ۱۰ \Rightarrow ۱۰x = ۳۰ \Rightarrow x = ۳$$

واریانس داده‌های ۴ ، ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{(۴-۱۰)^۲ + (۸-۱۰)^۲ + (۱۲-۱۰)^۲ + (۱۶-۱۰)^۲}{۴}$$

$$= \frac{۳۶ + ۴ + ۴ + ۳۶}{۴} = ۲۰$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۸۷ تا ۸۹)

۶۰- **گزینهٔ «۴»** *(امیرحسین ابومحبوب)*

تعداد داده‌ها برابر ۱۱ است، پس داده‌های سوم و نهم به ترتیب چارک اول و سوم هستند. سه حالت متفاوت برای a در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $۳ < a < ۹$ باشد؛ در این صورت چارک اول داده‌ها برابر a است. در این صورت $۲a + ۱ < ۱۹$ و چارک سوم داده‌ها برابر ۲۴ است. با توجه به فرض داریم:

$$Q_۳ - Q_۱ = ۲۶ \Rightarrow ۲۴ - a = ۲۶ \Rightarrow a = -۲ \quad \text{غ ق ق}$$

حالت دوم: $a = ۹$ باشد؛ در این صورت چارک اول داده‌ها برابر ۹ است و داریم:

$$Q_۳ - ۹ = ۲۶ \Rightarrow Q_۳ = ۳۵$$

۳۵ در میان داده‌ها وجود ندارد، پس این حالت نیز امکان‌پذیر نیست.

حالت سوم: $a > ۹$ باشد، در این صورت مشابه حالت قبل $Q_۱ = ۹$ و $Q_۳ = ۳۵$ است. این امر تنها در صورتی امکان‌پذیر است که $۲a + ۱ = ۳۵$ و در نتیجه $a = ۱۷$ باشد. حال داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$۱ , ۳ , \underset{Q_۱}{۹} , ۱۷ , ۱۷ , ۱۸ , ۲۴ , ۲۴ , \underset{Q_۳}{۳۵} , ۳۹ , ۴۲$$

میانگین داده‌های داخل جعبه (بین $Q_۱$ و $Q_۳$) برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۱۷ + ۱۷ + ۱۸ + ۲۴ + ۲۴}{۵} = \frac{۱۰۰}{۵} = ۲۰$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۹۱ و ۹۲)

@master_Azmon

فیزیک ۳

۶۱- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا جباری)*

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ برای مثال اگر خودرویی روی خط راست در حال حرکت باشد و رانندهٔ آن ترمز بگیرد، نیروی خالص وارد بر خودرو در خلاف جهت حرکت آن است.

ب) نادرست؛ نیروهای کنش و واکنش به دو جسم متفاوت وارد می‌شوند و نمی‌توان از آن‌ها برایند گرفت.

پ) درست؛ برای مثال هنگام ترمز خودرو بر مسیر مستقیم، هر چه شتاب ترمز بیشتر باشد، تغییر سرعت آن ناگهانی‌تر بوده و سرنشینان خودرو با شدت بیشتری به جلو پرتاب می‌شوند.

ت) نادرست؛ اگر نیروی خالص وارد بر جسمی صفر باشد، طبق قانون اول نیوتون یا جسم ساکن است و یا با سرعت ثابت در حال حرکت است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۶۲- **گزینهٔ «۳»** *(بهزاد آزادفر)*

بررسی موارد:

الف) درست؛ در شکل (۱)، جرم ثابت و نیروی خالص وارد بر جسم افزایش یافته است. با این افزایش نیروی خالص، شتاب نیز افزایش یافته است. بنابراین شتاب جسم با نیروی خالص وارد بر آن رابطهٔ مستقیم دارد و این بیانی از قانون دوم نیوتون است. در شکل (۲)، با ثابت ماندن نیرو و افزایش جرم، شتاب جسم کاهش یافته است. پس از این شکل نتیجه می‌شود که شتاب با جرم نسبت وارون دارد که این عبارت نیز بیانی از قانون دوم نیوتون است.

ب) درست؛ در شکل (۱)، با ثابت ماندن جرم و افزایش نیروی خالص، شتاب افزایش یافته است. در نتیجه شتاب جسم با نیروی خالص وارد بر آن رابطهٔ مستقیم دارد.

پ) نادرست؛ در شکل (۲)، نیرو ثابت و جرم تغییر یافته است، بنابراین از این شکل، رابطه‌ای میان نیروی خالص و جرم جسم نتیجه نمی‌شود.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۶۳- **گزینهٔ «۴»** *(پوریا علاقه‌مند)*

قانون دوم نیوتون را در حالت اول می‌نویسیم:

$$\vec{F}_{net1}=m_1\vec{a}_1 \xrightarrow[m_1=4m\ ,\ \vec{a}_1=\vec{a}]{\vec{F}_{net1}=2\vec{F}} 2\vec{F}=4m(\vec{a})$$

$$\Rightarrow \vec{F}=2m\vec{a} \qquad (*)$$

در حالت دوم، جرم جسم $m_2=0/4kg+m_1$ می‌شود. بار دیگر قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

$$\vec{F}_{net2}=m_2\vec{a}_2 \xrightarrow[m_2=0/4kg+m_1=0/4kg+4m]{\vec{F}_{net2}=\vec{F}\ ,\ \vec{a}_2=\frac{1}{8}\vec{a}}$$

$$\vec{F}=\frac{1}{8}\vec{a}(0/4+4m) \xrightarrow{(*)} 2m\vec{a}=\frac{\vec{a}}{8}(0/4+4m)$$

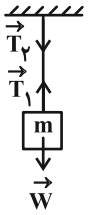
$$\Rightarrow 16m=0/4+4m \Rightarrow 12m=0/4$$

$$\Rightarrow m=\frac{0/4}{12}kg=\frac{1}{30}kg \Rightarrow m=\frac{100}{3}g$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

۶۴- **گزینهٔ «۲»** *(ادریس محمدی)*

چون جسم ساکن است، طبق قانون اول نیوتون باید برایند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد. بنابراین: $\vec{T}_1+\vec{W}=0\Rightarrow\vec{T}_1=-\vec{W}$ (۱)



همچنین با توجه به ناچیز بودن جرم نخ، اندازهٔ نیروی نخ ثابت است. چون $\vec{T}_1$ و $\vec{T}_2$ هم‌راستا اما در خلاف جهت یکدیگرند، داریم:

$$\vec{T}_2=-\vec{T}_1 \overset{(1)}{=} \vec{W} \qquad (2)$$

عکس‌العمل نیروی وارد بر سقف از طرف نخ، همان عکس‌العمل نیروی $\vec{T}_2$ است که با توجه به قانون سوم نیوتون داریم: $\vec{T}_2'=-\vec{T}_2 \overset{(2)}{=} -\vec{W}$

همچنین عکس‌العمل نیروی وارد بر جسم از طرف نخ، همان عکس‌العمل نیروی $\vec{T}_1$ است که با توجه به قانون سوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$\vec{T}_1'=-\vec{T}_1 \overset{(1)}{=} \vec{W}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۴، ۳۵ و ۴۴ تا ۴۶)

۶۵- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

جرم یک جسم در مکان‌های مختلف ثابت است، اما وزن آن علاوه بر جرم، بستگی به مقدار $\vec{g}$ (شتاب گرانشی) دارد. در این سؤال داریم:

$$W_{ماه}=mg_{ماه}=60\times1/6=96N$$

$$W_{زمین}=mg_{زمین}=60\times9/8=588N$$

$$\text{درصد اختلاف وزن}=\frac{W_{ماه}-W_{زمین}}{W_{زمین}}\times100$$

$$=\frac{96-588}{588}\times100\simeq-84\%$$

وزن شخص روی ماه تقریباً ۸۴ درصد کمتر از وزن همان شخص روی زمین است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ مشابه تمرین ۱-۲ صفحهٔ ۳۶)

@master_Azmon

۶۶- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی شریفی)*

بررسی گزینه‌ها:

می‌دانیم با افزایش تندی یک جسم، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا در مقابل حرکت آن افزایش می‌یابد. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، با توجه به افزایش پیوسته مقاومت هوا، می‌توان نتیجه گرفت که تندی چترباز نیز پیوسته افزایش می‌یابد و به دنبال آن نوع حرکت آن تندشونده است. (درستی گزینهٔ «۱»)

افزایش ناگهانی نیروی مقاومت هوا در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3، به معنای باز شدن چتر توسط چترباز است. بنابراین از صفر تا t_2 چترباز بدون چتر و از t_2 به بعد با چتر به حرکت خود ادامه می‌دهد. با توجه به ثابت شدن نیرو در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2 و t_4 تا t_5، چترباز به تندی حدی می‌رسد (درستی گزینهٔ «۳»). اما دقت کنید تندی حدی چترباز در دو حالت با یکدیگر متفاوت است. زیرا با افزایش مساحت چترباز به خاطر باز شدن چتر، در تندی کمتر نسبت به حالت قبل، نیروی مقاومت هوا با وزن چترباز برابر می‌شود (نادرستی گزینهٔ «۲»).

تندی حدی چترباز در حالت بدون چتر، بیشینهٔ تندی او در طول حرکت است (درستی گزینهٔ «۴»).

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۶۷- **گزینهٔ «۴»** *(حسین الهی)*

قانون دوم نیوتون را نوشته و شتاب هر دو گلوله را به دست می‌آوریم:

$$F_{net}=ma \xrightarrow{F_{net}=W-f_D} W-f_D=ma$$

$$\Rightarrow ma=W-f_D \xrightarrow{W=mg} a=g-\frac{f_D}{m}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{m_1=5kg} a_1=10-\frac{10}{5}=8\frac{m}{s^2} \\ \xrightarrow{m_2=10kg} a_2=10-\frac{10}{10}=9\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

شتاب حرکت هر دو متحرک ثابت و مکان و سرعت اولیهٔ آن‌ها یکسان است. بنابراین فاصلهٔ دو گلوله زمانی به بیشترین مقدار خود می‌رسد که گلولهٔ با شتاب بیشتر به زمین برسد:

$$a_2>a_1 \Rightarrow \Delta y_2=\frac{1}{2}a_2t^2 \xrightarrow[a_2=9\frac{m}{s^2}]{\Delta y=18m} 18=\frac{1}{2}(9)t^2 \Rightarrow t=2s$$

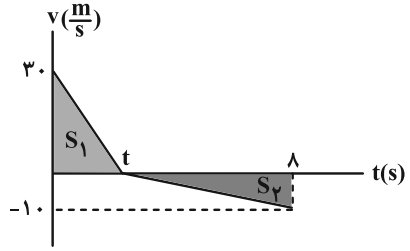
$$t=2s \Rightarrow \Delta y_1=\frac{1}{2}a_1t^2 \xrightarrow[a_1=8\frac{m}{s^2}]{t=2s} \Delta y_1=\frac{1}{2}(8)(2)(2)=16m$$

$$\text{بیشترین فاصلهٔ دو گلوله} = \Delta y_2-\Delta y_1=18m-16m=2m$$

(فیزیک ۳- ترکیبی؛ صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ و ۳۵ تا ۳۷)

۶۸- **گزینهٔ «۲»** *(مجتبی نکوئیان)*

اندازهٔ جابه‌جایی جسم در مسیر رفت و برگشت با هم برابر است. با توجه به این‌که جابه‌جایی برابر با سطح زیر نمودار $v-t$ است، داریم:



$$S_1=S_2 \Rightarrow \frac{1}{2}t(30)=\frac{1}{2}(8-t)(10) \Rightarrow t=2s$$

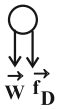
چون نمودار به صورت خط راست است، شتاب حرکت برابر با شیب خط است، پس:

مسیر رفت: $a_1=\frac{-30}{2}=-15\frac{m}{s^2}$

مسیر برگشت: $a_2=\frac{-10}{8-2}=-\frac{5}{3}\frac{m}{s^2}$

با استفاده از قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{net}=m\vec{a})$ برای مسیر رفت و برگشت داریم:

مسیر رفت:



$$-mg-f_D=ma_1$$
$$\Rightarrow -(0/3)(10)-f_D=0/3(-15)$$
$$\Rightarrow f_D=1/5N$$

مسیر برگشت:

$$-mg+f'_D=ma_2$$
$$\Rightarrow -(0/3)(10)+f'_D=\frac{3}{10}(-\frac{5}{3})$$
$$\Rightarrow f'_D=2/5N$$

در آخر داریم:

$$\frac{f'_D}{f_D}=\frac{2/5}{1/5}=\frac{5}{3}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۶۹- **گزینهٔ «۳»** *(محمدکاظم منشادی)*

از آنجا که جسم در هر سه حالت ساکن و در تعادل است، می‌توان نوشت:

$$F_{N_1}=F+mg \quad , \quad F_{N_2}=2F-mg \quad , \quad F_{N_3}=3F$$

$$3F_{N_1}=F_{N_2}+F_{N_3} \Rightarrow 3F+3mg=5F-mg$$

$$\Rightarrow F=2mg \qquad (*)$$

$$\frac{F_{N_2}}{F_{N_1}} \overset{(*)}{=} \frac{2F-mg}{F+mg}=\frac{3mg}{3mg}=1$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** *(پوریا علاقه‌مند)*

در بازه‌های زمانی صفر تا ۳s و ۹s تا ۱۰s، نمودار تندی متحرک به صورت خط راست است. از این‌رو شتاب متحرک ثابت و برابر با شتاب متوسط است. با توجه به این نکته شتاب آسانسور در دو بازهٔ زمانی مذکور را به دست می‌آوریم. دقت کنید چون تندی متحرک داده شده است، تنها می‌توانیم بزرگی شتاب متحرک را به دست آوریم.

@master_Azmon

$$|a| = |a_{av}| = \frac{|v_2 - v_1|}{t_2 - t_1} = \frac{9}{3} = 3\frac{m}{s^2} \quad : \text{۰ تا } 3s$$

چون معلوم نیست آسانسور در $t = 1s$ رو به بالا یا رو به پایین حرکت کرده است، هر دو حالت را در نظر می‌گیریم، اگر آسانسور رو به بالا حرکت کند داریم: (دقت کنید در هر دو حالت حرکت تندشونده است.)

$$F_{net_1} = ma_1 \xrightarrow[a_1 = 3\frac{m}{s^2}]{F_{net_1} = F_{N_1} - mg} F_{N_1} - 10m = 3m \Rightarrow F_{N_1} = 13m$$

و اگر رو به پایین حرکت کند:

$$F_{net_2} = ma_2 \xrightarrow[a_1 = 3\frac{m}{s^2}]{F_{net_2} = mg - F_{N_2}} 10m - F_{N_2} = 3m \Rightarrow F_{N_2} = 7m$$

در هر دو حالت، در $t = 8s$ حرکت آسانسور با سرعت ثابت بوده است. پس در هر دو حالت نیروی عمودی سطح برابر است با:

$$a = 0 \Rightarrow F_{net} = 0 \Rightarrow F_N = mg = 10m$$

در آخر داریم:

$$\frac{F_{N_1}}{F_N} = \frac{13m}{10m} \text{ یا } \frac{F_{N_2}}{F_N} = \frac{7m}{10m} \text{ یا } 1/3 \text{ یا } 0/7 = \text{نسبت خواسته شده}$$

دقت کنید عددی که ترازو نشان می‌دهد، در واقع عکس‌العمل نیروی عمودی سطح است که اندازهٔ هر دو یکسان است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

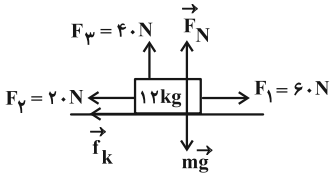
۷۱- **گزینهٔ «۲»** *(کامران ابراهیمی)*

جسم در راستای عمودی حرکتی ندارد، لذا $a_y = 0$ و می‌توان نوشت:

$$a_y = 0 \Rightarrow F_{net(y)} = 0 \Rightarrow mg = F_3 + F_N$$

$$\xrightarrow[F_3 = 40N]{m = 12kg} 120 = 40 + F_N \Rightarrow F_N = 80N$$

در راستای افقی، قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم:



$$F_{net(x)} = F_1 - F_2 - f_k \xrightarrow[F_{net} = ma]{f_k = \mu_k F_N}$$

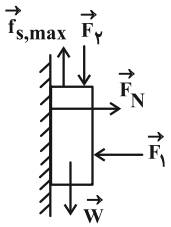
$$ma = F_1 - F_2 - \mu_k F_N \xrightarrow[\mu_k = 0/4\ ,\ F_N = 80N]{m = 12kg\ ,\ F_1 = 60N\ ,\ F_2 = 20N}$$

$$12a = 60 - 20 - 80(0/4) \Rightarrow a = \frac{2}{3}\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۴۳)

۷۲- **گزینهٔ «۳»** *(سیاوش خادمی)*

چون نیروی $\vec{F}_2$ رو به پایین است، پس از وارد شدن آن به جسم، جسم در آستانهٔ لغزش رو به پایین قرار می‌گیرد. با توجه به این‌که جسم در آستانهٔ لغزش است، برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای قائم برابر با صفر می‌شود.



$$W = mg = 0/15 \times 10 = 1/5N$$

$$F_{net\,y} = 0 \Rightarrow f_{s,max} = F_2 + W \Rightarrow f_{s,max} = 1/5 + 1/5 = 3N$$

نیرویی که از طرف دیوار به چوب وارد می‌شود، برابر با برایند نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است، بنابراین:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s,max}^2} \Rightarrow 5 = \sqrt{(F_N)^2 + 3^2}$$

$$\Rightarrow 25 = (F_N)^2 + 9 \Rightarrow (F_N)^2 = 16 \Rightarrow F_N = 4N$$

در آخر داریم:

$$\mu_s = \frac{f_{s,max}}{F_N} = \frac{3}{4} = 0/75$$

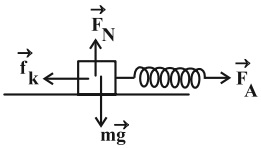
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۴۳)

۷۳- **گزینهٔ «۱»** *(مهدی شریفی)*

طبق قانون هوک، شیب نمودار $F - x$ برابر با ثابت فنر است:

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{\text{شیب } A}{\text{شیب } B} = \frac{\frac{F}{1}}{\frac{F}{4}} = 4$$

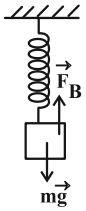
حالت اول: در حرکت با سرعت ثابت، برایند نیروها صفر است.



$$\begin{cases} F_A = f_k = \mu_k F_N \\ F_N = mg \end{cases} \xrightarrow{F_A = k_A x_A} k_A x_A = 0/1mg$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{mg}{10k_A}$$

حالت دوم: جسم در حال تعادل است، یعنی برایند نیروهای وارد بر آن صفر است.



$$F_B = mg \Rightarrow k_B x_B = mg$$

$$\Rightarrow x_B = \frac{mg}{k_B}$$

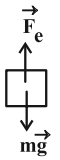
$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{\frac{mg}{10k_A}}{\frac{mg}{k_B}} = \frac{k_B}{10k_A} \overset{(*)}{=} \frac{1}{40}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

@master_Azmon

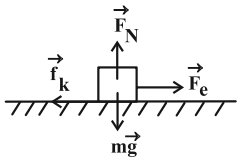
۷۴- **گزینهٔ «۲»** *(محمد مقدم)*

ابتدا در حالت قائم نیروهای وارد بر جسم را رسم کرده و قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:



$$F_{net}=0\Rightarrow F_e-mg=0$$
$$\Rightarrow k\times 0/08=mg\Rightarrow k=\frac{mg}{0/08} \qquad (1)$$

حال نیروهای وارد بر جسم در راستای حرکت افقی را رسم کرده و قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:



$$F_{net(y)}=0\Rightarrow F_N-mg=0\Rightarrow F_N=mg \qquad (2)$$

$$f_k=\mu_k F_N \xrightarrow{(2)} f_k=0/5\times mg=\frac{mg}{2}$$

$$F_{net(x)}=ma\Rightarrow F_e-f_k=ma\Rightarrow k\Delta x-\frac{mg}{2}=m\times 0/2g$$

$$\xrightarrow{(1)}\frac{mg}{0/08}\Delta x-\frac{mg}{2}=0/2mg$$
$$\Rightarrow \Delta x=0/056\,m=5/6\,cm$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۷۵- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

ابتدا اندازهٔ نیروی کشسانی فنر را با استفاده از قانون هوک به دست می‌آوریم:

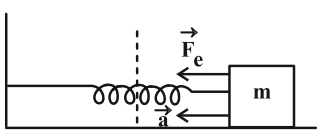
$$F_e=kx\xrightarrow[x=25\times10^{-2}m]{k=3/6\frac{N}{cm}=360\frac{N}{m}}F_e=(360)(25\times10^{-2})=90\,N$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{net}=ma\xrightarrow[m=5kg]{F_{net}=F_e=90N}90=5a\Rightarrow a=18\frac{m}{s^2}$$

با توجه به این‌که فنر نیرویی به طرف نقطهٔ تعادل به جسم وارد می‌کند، می‌توان گفت که نیروی فنر و در نتیجه شتاب حرکت جسم در لحظهٔ رها شدن آن، خلاف جهت محور x است. پس:

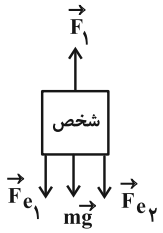
$$\vec{a}=(-18\frac{m}{s^2})\vec{i}$$



(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۷۶- **گزینهٔ «۱»** *(محمدکاظم منشاری)*

با توجه به تعادل شخص می‌توان نوشت:



$$F_{net}=0\Rightarrow F_1-F_{e_1}-F_{e_2}-mg=0$$
$$F_1-kx_1-kx_2-mg=0$$
$$\Rightarrow F_1-500\times0/6-500\times0/4-500=0\Rightarrow F_1=1000\,N$$

$\vec{F}_1$ نیرویی است که از طرف ترازو به شخص وارد می‌شود. در نتیجه طبق قانون سوم نیوتون نیروی رو به پایین $F_1'=F_1=1000\,N$ به ترازو وارد می‌شود. با توجه به تعادل فنر داریم:

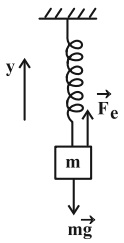
$$F_{net}=0\Rightarrow F_2=F_{e_1}=kx_1$$
$$\Rightarrow F_2=500\times0/6=300\,N$$

$\vec{F}_2$ نیرویی است که ترازو به فنر وارد می‌کند، در نتیجه نیروی رو به بالای $F_2'=F_2=300\,N$ از طرف فنر به ترازو وارد می‌شود. به‌طور مشابه نیروی رو به بالای $F_3'=F_3=200\,N$ از طرف فنر ۲ به ترازو وارد می‌شود. از آنجایی که ترازو برایند نیروی عمودی وارد بر خودش را اندازه می‌گیرد، داریم: $F_1'-F_2'-F_3'=1000-200-300=500\,N$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

۷۷- **گزینهٔ «۲»** *(علیرضا جباری)*

در لحظهٔ مورد نظر نیروهای وارد بر وزنه را رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم:



$$F_{net}=ma\Rightarrow F_e-mg=ma\xrightarrow{F_e=k\Delta L}$$
$$k\Delta L=mg+ma\xrightarrow[m=600g=0/6kg\ ,\ a=1\frac{m}{s^2}]{k=132\frac{N}{m}\ ,\ g=10\frac{N}{kg}}$$
$$132\Delta L=0/6\times10+0/6\times1\Rightarrow 132\Delta L=6/6$$
$$\Rightarrow \Delta L=\frac{6/6}{132}=0/05\,m=5\,cm$$

اکنون می‌توانیم طول فنر را در حالت جدید به دست آوریم:

$$\Delta L=L_2-L_1\xrightarrow[\Delta L=5cm]{L_1=40cm}5=L_2-40\Rightarrow L_2=45\,cm$$

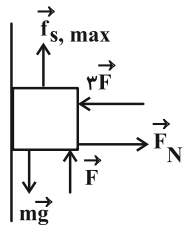
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶)

@master_Azmon

۷۸- **گزینهٔ «۳»** (ادریس محمدی)

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: جسم در آستانهٔ لغزش به سمت پایین باشد.



$$F_{net(x)} = 0 \Rightarrow F_N - 3F = 0 \Rightarrow F_N = 3F$$

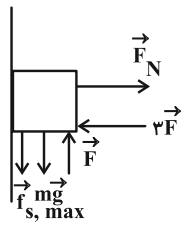
$$F_{net(y)} = ma \Rightarrow f_{s,max} + F - mg = ma$$

$$\xrightarrow[f_{s,max}=\mu_s F_N \,,\, F_N=3F]{m=5kg \,,\, a=-1\frac{m}{s^2} \,,\, g=10\frac{N}{kg}} 3\mu_s F + F = 50 + (-5)$$

$$\Rightarrow 3\mu_s F + F = 45 \qquad (1)$$

توجه: دقت شود که چون آسانسور به سمت بالا حرکت می‌کند و حرکت کندشونده است، پس باید شتاب به سمت پایین $(a < 0)$ باشد. (جهت مثبت محور y را به بالا درنظر می‌گیریم).

حالت دوم: جسم در آستانهٔ حرکت به سمت بالا باشد.



$$F_{net(x)} = 0 \Rightarrow F_N - 3F = 0 \Rightarrow F_N = 3F$$

$$F_{net(y)} = ma \Rightarrow F - f_{s,max} - mg = ma$$

$$\xrightarrow[a=-4\frac{m}{s^2} \,,\, f_{s,max}=\mu_s F_N \,,\, F_N=3F]{m=5kg \,,\, g=10\frac{N}{kg}}$$

$$F - 3\mu_s F - 50 = -20 \Rightarrow F - 3\mu_s F = 30 \qquad (2)$$

توجه: دقت شود که چون آسانسور به سمت پایین حرکت می‌کند و حرکت تندشونده است، پس باید شتاب هم به سمت پایین باشد. $(a < 0)$

حال طبق روابط (۱) و (۲)، F و μ_s را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F + 3\mu_s F = 45 \\ F - 3\mu_s F = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع روابط}} 2F = 75 \Rightarrow F = \frac{75}{2}N$$

در آخر F را در یکی از روابط جای‌گذاری می‌کنیم و μ_s را به دست می‌آوریم:

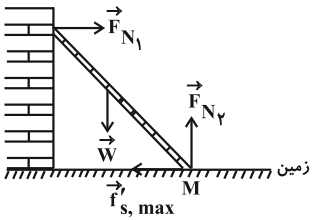
$$F + 3\mu_s F = 45 \xrightarrow{F=\frac{75}{2}N} \frac{75}{2} + 3\mu_s \times \frac{75}{2} = 45$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } 2} 75 + 225\mu_s = 90 \Rightarrow \mu_s = \frac{15}{225} = \frac{1}{15}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** (آراس محمدی)

در ابتدا بدون در نظر گرفتن جعبه، نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم:



$$F_{N_2} = W \xrightarrow{W=mg} F_{N_2} = 24 \times 10 = 240N$$

دقت کنید که اصطکاک ناشی از جعبه نیز در مسئله تأثیرگذار است:

$f''_{s,max} \leftarrow$ M $\leftarrow f'_{s,max}$ ، $f_{s,max} = f'_{s,max} + f''_{s,max}$ (*)

اکنون داریم:

$$F_{N_1} = f_{s,max} \xrightarrow[f'_{s,max}=\mu_s F_{N_2} \,,\, \mu_s=0/4 \,,\, F_{N_2}=240N]{(*)}$$

$$F_{N_1} = 96 + f''_{s,max} \xrightarrow[\text{جرم جعبه}=m']{f''_{s,max}=(\text{جرم جعبه}) \times g \times \mu_s}$$

$$F_{N_1} = 96 + 4m'$$

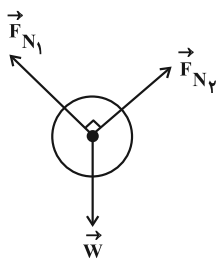
و در نهایت از دادهٔ سؤال $(F_{N_1} = 260N)$ می‌توان نوشت:

$$260 = 96 + 4m' \Rightarrow 164 = 4m' \Rightarrow m' = 41kg$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۵ تا ۴۳)

۸۰- **گزینهٔ «۲»** (مسعود غدانی)

نیروهای وارد بر کره به صورت زیر است:



چون کره در حال تعادل است، برایند نیروهای وارد بر آن صفر است. بنابراین داریم:

$$\vec{F}_{net} = \vec{W} + \vec{F}_{N_1} + \vec{F}_{N_2} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{N_1} + \vec{F}_{N_2} = -\vec{W}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_{N_1} + \vec{F}_{N_2}| = |-\vec{W}| = mg = 500N$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۳۹)

@master_Azmon

فیزیک ۱

۸۱- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

تنها مورد (ب) درست است.

بررسی موارد:

الف) نیرو همانند تندی یک کمیت فرعی است، اما دقت کنید نیرو یک کمیت فرعی برداری و تندی یک کمیت فرعی نرده‌ای می‌باشد.

ب) $۸/۰۱\times۱۰^{-۶}\,m \xrightarrow{\text{نمادگذاری علمی}} ۰/۰۰۰۰۰۸۰۱\,m$

پ) $\begin{cases}۱pm=۱۰^{-۱۲}\,m\\ ۱nm=۱۰^{-۹}\,m\end{cases}\Rightarrow ۱pm=۱۰^{-۳}\,nm$

بنابراین یک پیکومتر، درواقع $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ برابر یک نانومتر است.

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۷ و ۱۲)

۸۲- **گزینهٔ «۳»** *(حسام نادری)*

ابتدا حجم ۹۰۰ گرم روغن را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{\text{روغن}}=\frac{m_{\text{روغن}}}{\rho_{\text{روغن}}}\xrightarrow[\rho_{\text{روغن}}=۰/۸\frac{g}{cm^۳}]{m_{\text{روغن}}=۹۰۰g} V_{\text{روغن}}=\frac{۹۰۰}{۰/۸}=۱۱۲۵\,cm^۳$$

حال حجم فضای خالی ظرف را محاسبه کرده و می‌دانیم حجم ظاهری قطعه فلز، برابر با حجم روغن جابه‌جا شده است (حجم خالی ظرف + حجم روغن سرریز شده):

$$V_{\text{خالی}}=\pi r^۲h\xrightarrow[h=۵cm]{r=۱۰cm}V_{\text{خالی}}=۳\times۱۰^۲\times۵=۱۵۰۰\,cm^۳$$

$$V_{\text{فلز}}=V_{\text{خالی}}+V_{\text{روغن}}=۱۵۰۰+۱۱۲۵=۲۶۲۵\,cm^۳$$

حال حجم واقعی قطعه فلز را محاسبه کرده و سپس حجم حفرهٔ درون آن را به دست می‌آوریم:

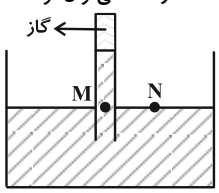
$$V_{\text{واقعی فلز}}=\frac{m_{\text{فلز}}}{\rho_{\text{فلز}}}\xrightarrow[\rho_{\text{فلز}}=۲/۷\frac{g}{cm^۳}]{m_{\text{فلز}}=۱۶۲۰g}V_{\text{واقعی فلز}}=\frac{۱۶۲۰}{۲/۷}=۶۰۰\,cm^۳$$

$$\Rightarrow V_{\text{حفره}}=V_{\text{ظاهری فلز}}-V_{\text{واقعی فلز}}=۲۶۲۵-۶۰۰=۲۰۲۵\,cm^۳$$

(فیزیک ۱- فیزیک و اندازه‌گیری؛ صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۸۳- **گزینهٔ «۱»** *(کامران ابراهیمی)*

با توجه به هم‌ترازی نقاط M و N می‌توان نوشت:



$$P_M=P_N\Rightarrow P_{\text{گاز}}+P_{\text{مایع}}=P_۰\Rightarrow ۴cmHg+P_{\text{مایع}}=۷۴cmHg$$

$$\Rightarrow P_{\text{مایع}}=۷۰cmHg$$

حال برای تبدیل سانتی‌متر جیوه به ارتفاع مایع مورد نظر داریم:

$$\rho_{\text{مایع}}h_{\text{مایع}}=\rho_{\text{جیوه}}h_{\text{جیوه}}\Rightarrow ۶/۸\times h_{\text{مایع}}=۱۳/۶\times۷۰$$

$$\Rightarrow h_{\text{مایع}}=۱۴۰cm$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۸۴- **گزینهٔ «۴»** *(محمدرضا شریفی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱ و ۲) با توجه به شکل $A_۱>A_۲$ است. طبق معادلهٔ پیوستگی، $A_۱v_۱=A_۲v_۲$ که از آن نتیجه می‌شود با کاهش سطح مقطع، تندی شاره افزایش می‌یابد، لذا $v_۱<v_۲$ می‌باشد. (درستی گزینهٔ «۲»). از طرف دیگر، طبق اصل برنولی، در مسیر حرکت شاره با افزایش تندی شاره فشار آن کاهش می‌یابد، پس از $v_۲>v_۱$ نتیجه می‌شود $P_۱>P_۲$ (درستی گزینهٔ «۱»).

۳) درست؛ با توجه به شکل، فشار در سطح مقطع‌های $A_۱$ و $A_۲$ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases}\text{سطح مقطع } A_۱: P_۱=P_۰+\rho_۱gh_۱\\ \text{سطح مقطع } A_۲: P_۲=P_۰+\rho_۲gh_۲\end{cases}$$

$$|P_۲-P_۱|=|P_۰+\rho_۲gh_۲-P_۰-\rho_۱gh_۱|=|\rho g(h_۲-h_۱)|$$

$$\xrightarrow{|h_۲-h_۱|=۲۰cm=۰/۲m\ ,\ \rho=۱۰۰۰\frac{kg}{m^۳}\ ,\ g=۱۰\frac{N}{kg}}$$

$$|P_۲-P_۱|=(۱۰۰۰)(۱۰)(۰/۲)=۲۰۰۰Pa$$

۴) با توجه به پاراگراف اول صفحهٔ ۴۴ کتاب درسی، آهنگ جریان (شارش) شاره تراکم‌ناپذیر، در تمام لوله یکسان است. از این رو گزینهٔ «۴» نادرست است.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد؛ صفحه‌های ۴۲ تا ۴۷)

۸۵- **گزینهٔ «۴»** *(مجتبی نکوئیان)*

چون اتلاف انرژی نداریم، با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$E_A=E_B\xrightarrow{E=K+U}K_A+U_A=K_B+U_B$$

$$\xrightarrow[U_B=U_A+۲۰]{K_B=۰/۶K_A}K_A+U_A=۰/۶K_A+U_A+۲۰$$

$$\Rightarrow ۰/۴K_A=۲۰\Rightarrow K_A=۵۰J$$

همچنین برای A و C می‌توان نوشت:

$$E_A=E_C\Rightarrow K_A+U_A=K_C+U_C$$

$$\xrightarrow[U_C=۰/۸U_A]{K_C=۱/۶K_A}K_A+U_A=۱/۶K_A+۰/۸U_A$$

$$\Rightarrow U_A=۳K_A=۱۵۰J$$

بنابراین انرژی مکانیکی گلوله در نقطهٔ C به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E_C=E_A=U_A+K_A=۵۰+۱۵۰=۲۰۰J$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

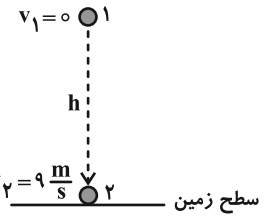
۸۶- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

ابتدا با استفاده از رابطهٔ توان، انرژی مصرف شده توسط بالابر را حساب می‌کنیم:

$$P=\frac{W}{t}\Rightarrow W=Pt\xrightarrow[t=۱۰s]{P=۳۰۰W}W=۳۰۰\times۱۰=۳۰۰۰J$$

بخشی از کار W که به صورت مفید روی بسته انجام شده است، همان انرژی پتانسیل ذخیره شده در بسته است. با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی هنگام سقوط بسته داریم:

@master_Azmon



$$E_1=E_2 \Rightarrow K_1+U_1=K_2+U_2 \xrightarrow[U_2=0]{K_1=0} U_1=K_2$$

$$\Rightarrow U_1=\frac{1}{2}mv_2^2 \xrightarrow[v_2=9\frac{m}{s}]{m=60kg} U_1=\frac{1}{2}\times 60\times 9^2$$

$$\Rightarrow U_1=30\times 81J$$

در پایان، بازده بالابر را حساب می‌کنیم:

$$Ra=\frac{U_1}{W}\times 100=\frac{30\times 81}{3000}\times 100=81\%$$

(فیزیک ۱- کار، انرژی و توان؛ صفحه‌های ۶۸ تا ۷۷)

۸۷- **گزینهٔ «۳»** *(سیاوش فارسی)*

با توجه به رابطهٔ میان دما برحسب درجهٔ سلسیوس و دما برحسب کلوین داریم:

$$T_2=3T_1 \xrightarrow{T=\theta+273} \theta_2+273=3(\theta_1+273)$$

$$\xrightarrow{\theta_2=6\theta_1} 6\theta_1+273=3\theta_1+(3\times 273)$$

$$\Rightarrow 3\theta_1=2\times 273 \Rightarrow \theta_1=182^\circ C$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۸۸- **گزینهٔ «۳»** *(حسین الهی)*

چون دما افزایش یافته است و ضریب انبساط سطحی مثبت است، تمام ابعاد صفحه افزایش می‌یابد. (رد گزینهٔ «۲»)

همچنین بر اثر انبساط، تمام ابعاد جسم و حفره‌های آن افزایش می‌یابند. بنابراین فاصلهٔ میان مرکز دایره‌ها نیز افزایش می‌یابد. (رد گزینهٔ «۴»)

برای بررسی سایر گزینه‌ها ابتدا باید تغییرات دما را در کل فرایند گرم کردن برحسب کلوین به دست آوریم:

$$\Delta T_1=20K \ , \ \Delta F_2=\frac{9}{5}\Delta T_2 \Rightarrow \Delta T_2=\frac{5}{9}(54)=30K$$

$$\Delta T_{کل}=\Delta T_1+\Delta T_2=20+30=50K$$

با استفاده از روابط انبساط طولی و سطحی داریم:

$$2\alpha=5/6\times 10^{-5} \Rightarrow \alpha=2/8\times 10^{-5}(\frac{1}{K})$$

$$\Delta L=L_\circ\alpha\Delta T \Rightarrow \frac{\Delta L}{L_\circ}\times 100=\alpha\Delta T\times 100$$

$$=2/8\times 10^{-5}\times 50\times 100=0/14\%$$

$$\Delta A=A_\circ(2\alpha)\Delta T \Rightarrow \frac{\Delta A}{A_\circ}\times 100=(2\alpha)\Delta T\times 100$$

$$=5/6\times 10^{-5}\times 50\times 100=0/28\%$$

بنابراین تمام فاصله‌ها ۰/۱۴٪ و مساحت تمام سطح‌ها ۰/۲۸٪ افزایش یافته است.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۴)

۸۹- **گزینهٔ «۳»** *(مهتبی نکوئیان)*

با استفاده از روابط $Q=mc\Delta\theta$ و $Q=Pt$، برای آب موجود در ظرف‌های A و B می‌توان نوشت:

$$A: Pt=m_Ac\Delta\theta_A \xrightarrow{\Delta\theta_A=20^\circ C \ , \ t=15min}$$

$$15P=m_Ac(20) \Rightarrow m_A=\frac{3P}{4c} \quad (1)$$

$$B: Pt=m_Bc\Delta\theta_B \xrightarrow{\Delta\theta_B=32^\circ C \ , \ t=15min}$$

$$15P=m_Bc(32) \Rightarrow m_B=\frac{15P}{32c} \quad (2)$$

جرم آب درون ظرف C، برابر با مجموع جرم آب درون ظرف‌های A و B است: $m_C=m_A+m_B$

$$Pt=m_Cc\Delta\theta_C \xrightarrow[t=19/5min]{m_C=m_A+m_B} 19/5P=(m_A+m_B)c\Delta\theta_c$$

$$\Rightarrow 19/5P=\frac{39P}{32c}\times c\times\Delta\theta_C \Rightarrow \Delta\theta_C=16^\circ C$$

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

۹۰- **گزینهٔ «۱»** *(مسعود خندانی)*

روش اول: برای استفاده از قوانین گازها، تمام دماها باید برحسب کلوین باشند:

$$\theta_1=277^\circ C \Rightarrow T_1=273+\theta_1=550K$$

$$\theta_2=-23^\circ C \Rightarrow T_2=273+\theta_2=250K$$

با توجه به قانون گازهای کامل داریم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2} \xrightarrow[T_1=550K \ , \ T_2=250K]{P_2=1/5P_1+P_1=2/5P_1}$$

$$\frac{P_1V_1}{550}=\frac{2/5P_1V_2}{250} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=5/5$$

در طی این فرایند جرم گاز ثابت می‌ماند $(m_1=m_2)$. در آخر برای مقایسهٔ چگالی‌ها می‌توان نوشت:

$$\rho=\frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{m_2}{m_1}\times\frac{V_1}{V_2} \xrightarrow{m_2=m_1 \ , \ \frac{V_1}{V_2}=5/5} \frac{\rho_2}{\rho_1}=5/5$$

روش دوم: می‌توان نشان داد چگالی گاز کامل از رابطهٔ $\rho=\frac{PM}{RT}$ به دست می‌آید که در آن P فشار گاز، M جرم مولی گاز، T دمای مطلق گاز و R ثابت جهانی گازهاست. با مقایسهٔ حالت اول و دوم داریم:

$$\rho=\frac{PM}{RT} \xrightarrow[M \text{ ثابت است.}]{R \text{ ثابت است.}} \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{P_2}{P_1}\times\frac{T_1}{T_2}$$

$$\xrightarrow[T_2=250K \ , \ T_1=550K]{P_2=2/5P_1} \frac{\rho_2}{\rho_1}=2/5\times\frac{550}{250}=5/5$$

دقت کنید در این رابطه نیز مانند قانون گازهای کامل، در حالت مقایسه‌ای دما باید برحسب کلوین باشد.

(فیزیک ۱- دما و گرما؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۳)

@master_Azmon

فیزیک ۲

۹۱- **گزینهٔ «۴»** *(امیراحمد میرسعید)*

با مقایسهٔ دو نیروی $۱۶F$ و F داریم:

$$\frac{۱۶F}{F}=\frac{\frac{k\times|۲q|\times|۵q|}{r^۲}}{\frac{k\times|۲q|\times|۵q|}{(r+۶۰)^۲}}\Rightarrow ۱۶=(\frac{r+۶۰}{r})^۲\Rightarrow r=۲۰cm$$

حال کافی است قانون کولن را برای $F=۲/۲۵N$ بنویسیم:

$$F=k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^۲}\Rightarrow ۲/۲۵=\frac{۹\times۱۰^۹\times|۲q|\times|۵q|}{۰/۱۶}$$

$$\Rightarrow ۰/۳۶=۹\times۱۰^{۱۰}\times q^۲\Rightarrow q^۲=۴\times۱۰^{-۱۲}$$

$$\Rightarrow|q|=۲\times۱۰^{-۶}C=۲\mu C\Rightarrow|۲q|=۴\mu C$$

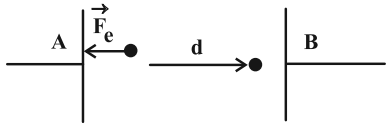
پس اندازهٔ بار $۲q$ برابر با $۴\mu C$ بوده است.

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۵ تا ۸)

۹۲- **گزینهٔ «۳»** *(مسعود خدرانی)*

با توجه به مدار داده شده، صفحهٔ A به پتانسیل مثبت باتری و صفحهٔ B به پتانسیل منفی آن وصل شده است. بنابراین صفحهٔ A پتانسیل بزرگ‌تری دارد و جهت میدان الکتریکی از صفحهٔ A به B است. اندازهٔ این میدان برابر است با:

$$E=\frac{\Delta V}{d}\xrightarrow[d=۲۰cm=۰/۲m]{\Delta V=۱۲V}E=\frac{۱۲}{۰/۲}=۶۰\frac{V}{m}$$



ذره دارای بار منفی است، از این‌رو نیروی الکتریکی وارد بر آن در خلاف جهت میدان است. اما جابه‌جایی ذره در جهت میدان است، پس $\theta=۱۸۰^\circ$ و طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$\Delta K=W_E\Rightarrow K_۲-K_۱=E|q|d\cos\theta$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)=E|q|d\cos\theta$$

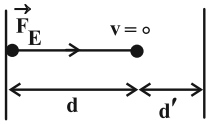
$$\xrightarrow[m=۲۰۰g=۰/۲kg\ ,\ |q|=۲mC=۲\times۱۰^{-۳}C]{v_۲=۰\ ,\ v_۱=۳۰\frac{cm}{s}=۰/۳\frac{m}{s}\ ,\ E=۶۰\frac{V}{m}\ ,\ \theta=۱۸۰^\circ}$$

$$\frac{۱}{۲}(۰/۲)(۰-(۰/۳)^۲)=۶۰\times۲\times۱۰^{-۳}\times d\times\cos۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow d=۷/۵cm$$

ذره پس از رها شدن از صفحهٔ A، مسافت $۷/۵cm$ را می‌پیماید تا متوقف شود. فاصلهٔ ذره هنگام توقف از صفحهٔ B برابر است با:

$$d'=۲۰-۷/۵=۱۲/۵cm$$



(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۲۱ تا ۲۶)

۹۳- **گزینهٔ «۲»** *(آراس محمدی)*

ظرفیت خازن از رابطهٔ $C=\kappa\varepsilon_۰\frac{A}{d}$ به دست می‌آید. با توجه به سؤال در صورت افزایش دما، تنها عامل تغییر ظرفیت خازن تغییر مساحت آن است:

$$C_۲-C_۱=\frac{\kappa\varepsilon_۰}{d}(A_۲-A_۱)\qquad (I)$$

از فصل ۴ فیزیک دهم به یاد داریم که:

$$\Delta A=A_۱۲\alpha\Delta\theta\xrightarrow[A_۱=۸۰۰cm^۲=۸\times۱۰^{-۲}m^۲\ ,\ \alpha=۲\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{^\circ C}]{\Delta F=\frac{۹}{۵}\Delta\theta\Rightarrow۱۸۰=\frac{۹}{۵}\Delta\theta\Rightarrow\Delta\theta=۱۰۰^\circ C}$$

$$\Delta A=۸\times۱۰^{-۲}\times۲\times۲\times۱۰^{-۵}\times۱۰۰=۳۲\times۱۰^{-۵}m^۲\qquad (II)$$

از ترکیب روابط (I) و (II) می‌توان نوشت:

$$C_۲-C_۱=\frac{\kappa\varepsilon_۰}{d}\times۳۲\times۱۰^{-۵}\xrightarrow[d=۳mm=۳\times۱۰^{-۳}m]{\kappa=۲\ ,\ \varepsilon_۰=۹\times۱۰^{-۱۲}\frac{F}{m}}$$

$$C_۲-C_۱=\frac{۲\times۹\times۱۰^{-۱۲}\times۳۲\times۱۰^{-۵}}{۳\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow C_۲-C_۱=۱/۹۲pF$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۸)

۹۴- **گزینهٔ «۱»** *(حسام نادری)*

عبارات (الف)، (ب)، (پ) و (ث) نادرستند. علت نادرستی هر یک را بررسی می‌کنیم:

الف) آمپر- ساعت (Ah) یکی از یکاهای بار الکتریکی است. $(q=It)$

ب) اندازهٔ سرعت سوق در سیم‌های مسی از مرتبهٔ $۱۰^{-۵}\frac{m}{s}$ یا $۱۰^{-۴}\frac{m}{s}$ است.

پ) نمودار جریان برحسب ولتاژ برای یک دیود نورگسیل، به صورت یک منحنی است. (LED یک مقاومت غیراهمی است.)

@master_Azmon

ث) از مقاومت‌های ترمیستور در مدارهای حساس به دما مانند زنگ خطر آتش استفاده می‌شود.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۴۷، ۴۸، ۵۰، ۵۳، ۵۸ و ۵۹)

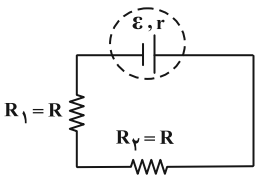
۹۵- **گزینهٔ «۱»** (محمدرضا شریفی)

با توجه به شکل مدار، ولت‌سنج در هر دو حالت اختلاف پتانسیل باتری را نشان می‌دهد. اختلاف پتانسیل باتری از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V = R_{eq} I \xrightarrow{I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}} V = \frac{R_{eq}\varepsilon}{R_{eq}+r}$$

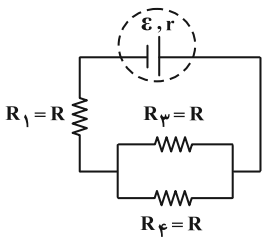
با داشتن ε و $r = R$، کافی است مقاومت معادل مدار را در هر دو حالت به دست آوریم:

حالت اول:



$$R_{eq_1} = R_1 + R_2 = 2R$$

حالت دوم:



$$R_{eq_2} = R_1 + R_{3,4}$$

$$\xrightarrow{R_3 \text{ و } R_4 \text{ موازی‌اند}} R_{eq_2} = R_1 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = R + \frac{R \times R}{2R} = \frac{3}{2}R$$

بنابراین نسبت اعدادی که ولت‌سنج در دو حالت نشان می‌دهد برابر است با:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{R_{eq_2}\varepsilon}{R_{eq_2}+r}}{\frac{R_{eq_1}\varepsilon}{R_{eq_1}+r}} = \frac{R_{eq_2}(R_{eq_1}+r)}{R_{eq_1}(R_{eq_2}+r)}$$

$$\xrightarrow[r=R]{R_{eq_1}=2R\ ,\ R_{eq_2}=\frac{3}{2}R} \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{3}{2}R(2R+R)}{2R(\frac{3}{2}R+R)}$$

$$= \frac{\frac{9}{2}R^2}{5R^2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{9}{10}$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۷۸)

۹۶- **گزینهٔ «۳»** (علیرضا جباری)

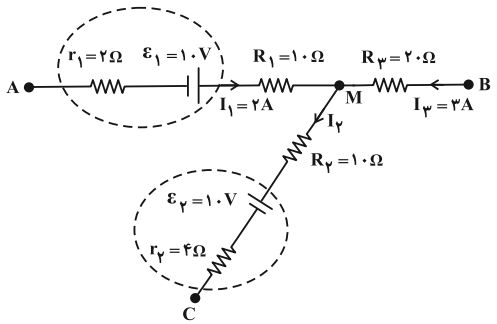
از نقطهٔ A روی مدار شروع کرده و به طرف نقطهٔ B می‌رویم و تغییر پتانسیل‌ها را می‌نویسیم تا به نقطهٔ B برسیم:

$$V_A - r_1 I_1 + \varepsilon_1 - R_1 I_1 + R_3 I_3 = V_B$$

$$\Rightarrow V_A - 2\times 2 + 10 - 2\times 10 + 20\times I_3 = V_B$$

$$\Rightarrow V_A - V_B - 14 = -20 I_3 \xrightarrow{V_A - V_B = -46V}$$

$$-46 - 14 = -20 I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{60}{20} = 3A$$



قاعدهٔ انشعاب در گرهٔ M را به کار می‌بریم و جریان I_2 را به دست می‌آوریم:

$$I_2 = I_1 + I_3 = 2 + 3 = 5A$$

باتری ۲ در اینجا به عنوان مصرف‌کننده عمل می‌کند و توان ورودی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_2 = \varepsilon_2 I_2 + r_2 I_2^2 = 10\times 5 + 4\times 5^2 = 50 + 100 = 150W$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰ و ۷۲ تا ۷۸)

۹۷- **گزینهٔ «۲»** (محمدکاظم منشادی)

رابطهٔ میدان مغناطیسی در درون سیملوله و مرکز پیچه مسطح را می‌نویسیم.

با تقسیم این دو رابطه داریم:

$$\begin{cases} B_{\text{سیملوله}} = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \\ B_{\text{پیچه}} = \frac{\mu_0 NI}{2R} \end{cases} \Rightarrow \frac{B_{\text{سیملوله}}}{B_{\text{پیچه}}} = \frac{I_{\text{سیملوله}}}{I_{\text{پیچه}}} \times \frac{N_{\text{سیملوله}}}{N_{\text{پیچه}}} \times \frac{2R_{\text{پیچه}}}{\ell_{\text{سیملوله}}}$$

@master_Azmon

$$\xrightarrow[I_{سیملوله}=I_{پیچه}\ ,\ N_{سیملوله}=N_{پیچه}]{B_{سیملوله}=B_{پیچه}-۳۰G\ ,\ \ell_{سیملوله}=۳(۲R_{پیچه})} \frac{B_{پیچه}-۳۰}{B_{پیچه}}=(۱)(۱)(\frac{۱}{۳})$$

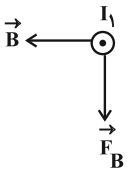
$$\Rightarrow ۳B_{پیچه}-۹۰=B_{پیچه}\Rightarrow B_{پیچه}=۴۵G=۴۵\times۱۰^{۳}mG$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۰)

۹۸- **گزینهٔ «۳»** (ادریس محمدی)

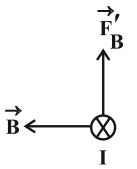
برای حل این سؤال، دو حالت مطرح شده را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: جریان $۲A$ از M به N در سیم عبور می‌کند که در این صورت طبق قاعدهٔ دست راست، نیروی رو به پایین F_B بر سیم وارد می‌شود که طبق قانون سوم نیوتون نیروی رو به بالای F_B به آهنربا و در نتیجه ترازو وارد می‌شود، پس:



$$F_{ترازو}=mg-F_B \qquad (۱)$$

حالت دوم: جریان I از N به M عبور می‌کند که در این حالت نیروی رو به بالا F'_B بر سیم حامل جریان وارد می‌شود. بنابراین طبق قانون سوم نیوتون، رو به پایین F'_B به آهنربا وارد می‌شود، پس:



$$F'_{ترازو}=mg+F'_B \qquad (۲)$$

حال با کم کردن دو رابطهٔ (۱) و (۲) از یکدیگر داریم:

$$F'_{ترازو}-F_{ترازو}=۱۵\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)}(mg+F'_B)-(mg-F_B)=۱۵$$

$$\Rightarrow F'_B+F_B=۱۵\xrightarrow{F_B=BIL\sin۹۰^\circ}BI'L'+BIL=۱۵$$

$$\xrightarrow[I=۲A\ ,\ L=L'=\frac{۳}{۴}m]{B=۰/۵T\ ,\ I'=I}\frac{۱}{۲}\times I\times\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۲}\times۲\times\frac{۳}{۴}=۱۵$$

$$\xrightarrow{\times۸}۳I+۶=۱۲۰\Rightarrow I=۳۸A$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۹۹- **گزینهٔ «۴»** (آراس محمدی)

با استفاده از قانون دست راست درمی‌یابیم که میدان مغناطیسی ناشی از سیملولهٔ Q به سمت راست می‌باشد:

$$M\bullet\longrightarrow B_Q$$

برای این‌که میدان مغناطیسی در این نقطه ماکزیمم گردد، می‌بایست میدان حاصل از سیملولهٔ P نیز به سمت راست باشد. به این منظور جهت جریان مطابق حالت (۲) است:

$$B_P+B_Q=۲۱۶G$$

از رابطهٔ $B=\frac{\mu_۰NI}{\ell}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{B_P}{B_Q}=\frac{N_P}{N_Q}\times\frac{I_P}{I_Q}\times\frac{\ell_Q}{\ell_P}\xrightarrow[N_P=۳۰۰\ ,\ N_Q=۲۰۰]{\ell_Q=\ell_P\ ,\ \frac{I_P}{I_Q}=\frac{۱}{۳}}$$

$$\frac{B_P}{B_Q}=\frac{۳۰۰}{۲۰۰}\times\frac{۱}{۳}\times۱\Rightarrow B_Q=۲B_P \qquad (*)$$

حال داریم:

$$B_P+B_Q=۲۱۶G\xrightarrow{(*)}B_P+۲B_P=۲۱۶G$$

$$\Rightarrow B_P=۷۲G=۷۲\times۱۰^{-۴}T$$

و در نهایت اندازهٔ جریان را به دست می‌آوریم:

$$B_P=\frac{\mu_۰N_PI_P}{\ell}\Rightarrow ۷۲\times۱۰^{-۴}=\frac{۱۲\times۱۰^{-۷}\times۳۰۰\times I_P}{۱}$$

$$\Rightarrow I_P=۲۰A$$

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ مشابه مسئلهٔ ۲۱ صفحهٔ ۱۰۷)

۱۰۰- **گزینهٔ «۲»** (حسام نادری)

بررسی علت نادرستی سایر گزینه‌ها:

۱) دو سیم بلند و موازی حامل جریان‌های همسو یکدیگر را جذب می‌کنند.

۳) پس از حذف میدان مغناطیسی خارجی، مادهٔ فرومغناطیس سخت، خاصیت آهنربایی خود را تا اندازهٔ قابل توجهی حفظ می‌کند.

۴) قطب‌های مغناطیسی زمین بر قطب‌های جغرافیایی آن منطبق نیستند. درواقع، قطب‌های مغناطیسی و جغرافیایی زمین فاصلهٔ نسبتاً زیادی از یکدیگر دارند؛ مثلاً قطب جنوب مغناطیسی تقریباً در فاصلهٔ ۱۸۰۰ کیلومتری قطب شمال جغرافیایی آن قرار دارد.

(فیزیک ۲- مغناطیس؛ صفحه‌های ۸۴ تا ۸۸، ۸۱ تا ۹۴ و ۱۰۱ تا ۱۰۳)

@master_Azmon

شیمی ۳

۱۰۱- **گزینهٔ «۱»** *(پیمان خوابوی‌مجد)*

(شیمی ۳- صفحهٔ ۳۸)

۱۰۲- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

فقط عبارت (ب) نادرست است.

بررسی بعضی از عبارت‌ها:

الف) واکنش‌هایی مانند $Na^+ + Cl^- \rightarrow NaCl$ بدون داد و ستد الکترون انجام می‌شوند.

ب) باتری لیمویی از فرو بردن دو تیغهٔ فلزی با جنس مختلف در داخل لیمو تشکیل می‌شود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۱۰۳- **گزینهٔ «۴»** *(امیر حاتمیان)*

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) الکتروشیمی افزون بر تهیهٔ مواد جدید به کمک انرژی الکتریکی (نه گرمایی!) می‌تواند در راستای پیاده کردن اصول شیمی سبز گام بردارد.

پ) کسب اطمینان از کیفیت فراورده‌های دارویی، بهداشتی، غذایی و ... ، در قلمرو علم الکتروشیمی قرار دارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۱۰۴- **گزینهٔ «۳»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) برای تشکیل هر مول Al_2O_3 ، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.

۲) تبدیل هر اتم فلزی به کاتیون آن با کاهش شعاع همراه است.

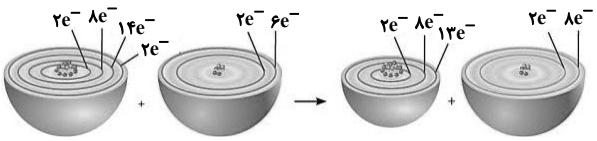
۳) Al با از دست دادن ۳ الکترون، اکسید شده و به Al^{3+} تبدیل می‌شود. گونه‌ای که اکسید می‌شود، همان کاهنده است.

۴) نیم‌واکنش کاهش به صورت روبه‌رو است: $O_2(g) + 4e^- \rightarrow 2O^{2-}(s)$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۱۰۵- **گزینهٔ «۳»** *(یاسر راش)*

معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش انجام شده به صورت زیر است:



$$4Fe(s) + 3O_2(g) \rightarrow 4Fe^{3+}(s) + 6O^{2-}(s)$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) گونهٔ (B) همان گاز اکسیژن بوده و با انجام واکنش، با دریافت الکترون‌های اتم آهن به آرایش الکترونی گاز نجیب هم‌دورهٔ خود یعنی $_{10}Ne$ می‌رسد.

۲) اتم‌های فلزی آهن، با از دست دادن الکترون سبب کاهش اتم‌های اکسیژن می‌شوند، بنابراین کاهنده‌اند.

۳) اتم‌های $Fe(s)$ ضمن تبدیل به یون‌های $Fe^{3+}(s)$ ، الکترون‌های زیرلایه‌های ۴s (با $n+l=4$) و ۳d (با $n+l=5$) را از دست می‌دهند.

$$_{26}Fe : [_{18}Ar]3d^6\ 4s^2 \xrightarrow{-3e^-} Fe^{3+} : [_{18}Ar]3d^5$$

۴)

$$4Fe(s) + 3O_2(g) \rightarrow 2Fe_2O_3(s) \sim 12e^-$$

$$?\,mg\ Fe_2O_3 = 0/06\,mol\ e^- \times \frac{2\,mol\ Fe_2O_3}{12\,mol\ e^-}$$

$$\times \frac{160g\ Fe_2O_3}{1mol\ Fe_2O_3} \times \frac{10^3\,mg}{1g} = 1600mg\ Fe_2O_3$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۱۰۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمد عظیمیان‌زواره)*

در واکنش $2Zn(s) + O_2(g) \rightarrow 2ZnO(s)$ فلز روی با از دست دادن الکترون، اکسایش یافته و نقش کاهنده را دارد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۹، ۴۰ و ۴۲)

۱۰۷- **گزینهٔ «۱»** *(امیرحسین طیبی)*

تنها عبارت (الف) درست است.

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

الف)

$$\overbrace{Zn(s) + \underbrace{CuSO_4(aq)}_{\text{محلول آبی‌رنگ}}}^{} \rightarrow \overbrace{\underbrace{ZnSO_4(aq)}_{\text{محلول بی‌رنگ}} + Cu(s)}^{}$$

ب) چون ضریب هر دو یون فلزی در طرفین واکنش برابر است، مجموع غلظت یون‌ها قبل و بعد از واکنش ثابت می‌ماند.

پ)

$$\underset{\text{کاهنده}}{Zn(s)} + \underset{\text{اکسنده}}{Cu^{2+}(aq)} \rightarrow \underset{\text{حاصل از اکسایش}}{Zn^{2+}(aq)} + \underset{\text{حاصل از کاهش}}{Cu(s)}$$

ت) به ازای هر یک مول Zn مصرفی، یک مول Cu بر روی تیغه رسوب می‌کند. از آنجایی که جرم مولی Zn از Cu بیشتر است، جرم تیغه کاهش می‌یابد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

@master_Azmon

۱۰۸- **گزینهٔ «۳»** *(محسن میمونی)*

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اتم مس نمی‌تواند به یون آلومینیم الکترون بدهد، پس تمایل آن به از دست دادن الکترون از آلومینیم کمتر است و لذا کاهندهٔ ضعیف‌تری است.

ب) ابتدا جرمی از تیغه که کاهش می‌یابد را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم Al مصرفی}: ۳/۰۱\times۱۰^{۲۴}e^- \times \frac{۱mol\ e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-}$$

$$\times \frac{۲mol\ Al}{۶mol\ e^-} \times \frac{۲۷g\ Al}{۱mol\ Al} = ۴۵g\ Al$$

حال جرمی که به تیغه اضافه می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{جرم Zn رسوب کرده بر روی تیغه}: ۳/۰۱\times۱۰^{۲۴}e^- \times \frac{۱mol\ e^-}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}e^-}$$

$$\times \frac{۳mol\ Zn}{۶mol\ e^-} \times \frac{۶۵g\ Zn}{۱mol\ Zn} \times \frac{۳}{۵} = ۹۷/۵g\ Zn$$

$$\text{تغییر جرم تیغه} = ۹۷/۵ - ۴۵ = ۵۲/۵g$$

پ) کاهندگی، تمایل به از دست دادن الکترون است که برای یونی مثل $Al^{۳+}$ تعریف نمی‌شود، چون اتم Al بیش از ۳ الکترون از دست نمی‌دهد. به طریق مشابه، در این واکنش کاهندگی برای یون‌های $Cu^{۲+}$ و $Zn^{۲+}$ نیز تعریف نمی‌شود.

ت) در واکنش‌های خودبه‌خودی، گونه‌های اکسنده و کاهنده سمت چپ (واکنش‌دهنده‌ها) از گونه‌های اکسنده و کاهنده سمت راست (فراورده‌ها) قوی‌تر هستند و در واکنش خودبه‌خودی، اکسنده و کاهنده قوی‌تر به ترتیب به کاهنده و اکسنده ضعیف‌تر تبدیل می‌شوند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(آرمین عظیمی)*

مقایسه قدرت کاهندگی فلزها و قدرت اکسندگی کاتیون‌ها به صورت زیر است:

$$\text{کاهندگی}: C > A > D > Cu > B$$

$$\text{اکسندگی}: B^{۲+} > Cu^{۲+} > D^{۲+} > A^{۲+} > C^{۲+}$$

بررسی عبارت‌ها:

الف) قدرت کاهندگی فلز B از C کمتر است، بنابراین واکنشی میان فلز B و کاتیون $C^{۲+}$ رخ نمی‌دهد و می‌توان آن‌ها را کنار هم نگه داشت.

ب) تمایل به گرفتن الکترون در یون $D^{۲+}$ نسبت به یون $A^{۲+}$ بیشتر است، زیرا یون $D^{۲+}$ قدرت اکسندگی بیشتری دارد.

پ) قدرت کاهندگی فلز Cu از فلز B بیشتر است، بنابراین واکنش داده شده به صورت خودبه‌خودی انجام می‌شود و پایداری فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بیشتر است.

ت) دمای محلول دارای تیغهٔ فلز C بیشتر تغییر کرده است، بنابراین شدت تغییر رنگ آبی محلول مس (II) سولفات در آن نیز بیشتر خواهد بود.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۱۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(خرشید مرادی)*

$$Zn(s) + ۲H^+(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + H_۲(g)$$

$$۱۷/۹۲L\ H_۲ \times \frac{۱mol\ H_۲}{۲۲/۴L\ H_۲} \times \frac{۱mol\ Zn}{۱mol\ H_۲} \times \frac{۶۵g\ Zn}{۱mol\ Zn} = ۵۲g\ Zn$$

۵۲ گرم از جرم تیغه بر اثر واکنش با اسید کاهش می‌یابد.

$$Zn(s) + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + Cu(s)$$

$$Cu(NO_۳)_۲ \text{ واکنش داده با Zn جرم} = x\,mol\ Zn$$

$$\times \frac{۶۵g\ Zn}{۱mol\ Zn} = ۶۵x\ g\ Zn$$

$$\text{جرم Cu رسوب کرده بر تیغه} = x\,mol\ Zn \times \frac{۱mol\ Cu}{۱mol\ Zn}$$

$$\times \frac{۶۴g\ Cu}{۱mol\ Cu} \times \frac{۱}{۲} = ۳۲x\ g\ Cu$$

$$\text{جرم Zn واکنش داده با HCl} = \text{کاهش جرم تیغه}$$

$$+ \text{جرم Cu رسوب کرده روی تیغه} - \text{جرم Zn واکنش داده با } Cu(NO_۳)_۲$$

$$= ۵۲ + ۶۵x - ۳۲x = ۶۵/۲g \Rightarrow x = ۰/۴mol\ Zn$$

$$۰/۴mol\ Zn \times \frac{۱mol\ Cu}{۱mol\ Zn} \times \frac{۱mol\ Cu(NO_۳)_۲}{۱mol\ Cu}$$

$$= ۰/۴mol\ Cu(NO_۳)_۲$$

$$\text{غلظت مولار } Cu(NO_۳)_۲ = \frac{n}{V} = \frac{۰/۴mol}{۱\ L} = ۰/۴mol.L^{-۱}$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

@master_Azmon

شیمی ۱

۱۱۱- **گزینهٔ «۳»** *(آرمین عظیمی)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) عنصر تکنسیم $(_{۴۳}Tc)$ با منگنز $(_{۲۵}Mn)$ که پنجمین عنصر دستهٔ d در دورهٔ چهارم است، هم‌گروه می‌باشد. رادیوایزوتوپ عنصرهای تکنسیم و فسفر در ایران نیز ساخته می‌شوند.

۲) در ایزوتوپ ^{۲۳۵}U، مجموع شمار نوترون‌ها و پروتون‌ها برابر با ۲۳۵ است. نوترون برخلاف پروتون بدون بار است. از طرفی چون تعداد پروتون‌ها و الکترون‌ها در اتم خنثی با هم برابر است، مجموع آن‌ها باید عددی زوج (۲p) باشد. این مجموع برابر ۱۸۴ است.

۳) چهارمین عنصر فراوان سیارهٔ زمین، منیزیم $(_{۱۲}Mg)$ بوده و یکی از عنصرهایی که ۱۲ الکترون در زیرلایهٔ s دارد، باریم $(_{۵۶}Ba)$ است. هر دو عنصر در گروه ۲ قرار داشته و یون پایدار $X^{۲+}$ ایجاد می‌کنند.

۴) با استفاده از اطلاعات موجود در هر خانه جدول، نمی‌توان تعداد نوترون‌های موجود در اتم‌های یک عنصر را تعیین کرد. بنابراین عدد جرمی اتم عنصر مورد نظر را نیز نمی‌توان مشخص کرد.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۱۱۲- **گزینهٔ «۱»** *(امیرعلی بیات)*

$$^{۲۰}B \rightarrow f_۱ = ۱۰٪ \quad , \quad M_۱ = ۲۰ amu$$

$$^{۲۲}B \rightarrow f_۲ = ? \quad , \quad M_۲ = ۲۲ amu$$

$$^{۲۴}B \rightarrow f_۳ = ? \quad , \quad M_۳ = ۲۴ amu$$

$$\left.\begin{array}{l} f_۳ = ۴f_۲ \\ f_۱ + f_۲ + f_۳ = ۱۰۰٪ \\ f_۱ = ۱۰٪ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۰ + f_۲ + ۴f_۲ = ۱۰۰ \Rightarrow \begin{cases} f_۲ = ۱۸٪ \\ f_۳ = ۷۲٪ \end{cases}$$

$$\bar{M} = M_۱ + (\frac{f_۲}{۱۰۰})(M_۲ - M_۱) + (\frac{f_۳}{۱۰۰})(M_۳ - M_۱)$$

$$= ۲۰ + \frac{۱۸}{۱۰۰} \times (۲۲ - ۲۰) + \frac{۷۲}{۱۰۰}(۲۴ - ۲۰) = ۲۳/۲۴ amu$$

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

۱۱۳- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

بررسی گزینه‌ها:

۱) در طیف نشری خطی اتم هیدروژن، رنگ بنفش ناشی از بازگشت الکترون از لایهٔ ششم به لایهٔ دوم می‌باشد؛ در حالی که پیرامون هستهٔ اتم بیش از ۶ لایه وجود دارد.

۲) آرایش الکترونی یون‌های $_{۳}Li^{+}$ و $_{۱۱}Na^{+}$ به ترتیب با آرایش الکترونی اتم‌های $_{۲}He$ و $_{۱۰}Ne$ یکسان می‌باشند و رنگ شعلهٔ آن‌ها به ترتیب قرمز و زرد است؛ بنابراین طول موج رنگ شعلهٔ X از Y بیشتر است.

۳) با افزایش شمارهٔ لایه‌های الکترونی، انرژی الکترون‌های قرار گرفته در آن‌ها افزایش یافته و اختلاف انرژی بین لایه‌های متوالی کاهش می‌یابد. از آنجایی که بین انرژی و طول موج پرتوها رابطهٔ معکوس وجود دارد، می‌توان نتیجه گرفت با افزایش شمارهٔ لایه‌های الکترونی، طول موج پرتوهای آزاد شده افزایش می‌یابد.

۴) اگرچه مدل اتمی بور با موفقیت توانست طیف نشری خطی هیدروژن را توجیه کند، اما توانایی توجیه طیف نشری خطی دیگر گونه‌ها با بیش از یک الکترون را نداشت؛ در نتیجه شکل ارائه شده توسط مدل بور قابل توجیه نیست.

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۷)

۱۱۴- **گزینهٔ «۱»** *(فرشید مرادی)*

چون اختلاف شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها از قدرمطلق بار یون بیشتر نیست، بنابراین هر دو حالت $n - e = ۲$ و $e - n = ۲$ باید مورد بررسی قرار گیرند:

$$\left.\begin{array}{l} e - p = ۲ \\ n + p = ۳۲ \\ n - e = ۲ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} n = ۱۸ \\ p = ۱۴ \\ e = ۱۶ \end{array} \Rightarrow {}_{۱۴}Si^{۲-} \quad \text{(یون پایدار ندارد)}$$

$$\left.\begin{array}{l} e - p = ۲ \\ n + p = ۳۲ \\ e - n = ۲ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} n = ۱۶ \\ p = ۱۶ \\ e = ۱۸ \end{array} \Rightarrow {}_{۱۶}S^{۲-}$$

از آنجایی که $_{۱۴}Si$ یون پایدار ندارد، عنصر مورد نظر $_{۱۶}S$ است که در گروه ۱۶ قرار دارد. زیرلایهٔ آخر در این گروه به شکل $np^{۴}$ است.

$$۲p^{۴}, ۳p^{۴}, ۴p^{۴}, ۵p^{۴}, ۶p^{۴}, ۷p^{۴}$$

مجموع $(n + l)$ الکترون‌ها در آخرین زیرلایهٔ عنصرهای گروه ۱۶

$$= ۴((۲+۱) + (۳+۱) + (۴+۱) + (۵+۱) + (۶+۱) + (۷+۱)) = ۱۳۲$$

(شیمی ۱- کیهان زادگاه الفبای هستی؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۴ و ۳۷)

۱۱۵- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا جمشیدی)*

عبارت‌های (الف) و (ت) درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را هلیم تشکیل می‌دهد.

پ) بوکسیت، $Al_۲O_۳$ به همراه ناخالصی است.

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

@master_Azmon

۱۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا طاهری‌نژاد)*

معادلهٔ موازنه شده واکنش‌ها به صورت زیر است:

$$I)\ I_2 + 10HNO_3 \rightarrow 2HIO_3 + 10NO_2 + 4H_2O$$

$$II)\ 12S_2Cl_4 + 7S_8 + 128H_2O \rightarrow 48SH_4Cl + 32H_2SO_4$$

$$\text{نسبت خواسته شده} = \frac{2+10+4}{48+32} = \frac{16}{80} = 0/2$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

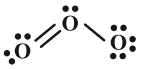
موارد الف، ب و ث به درستی بیان شده‌اند.

بررسی موارد:

الف) سوخت سبز، سوختی است که در ساختار خود افزون بر کربن و هیدروژن، اکسیژن نیز داشته باشد؛ در نتیجه شمار عنصرها حداقل برابر با ۳ است.

ب) مطابق جدول صفحهٔ ۷۲ کتاب درسی این مورد درست است.

پ) دگرشکلی از اکسیژن که نقطهٔ جوش بالاتری دارد، اوزون است.

ساختار لوویس اوزون:  (۳ جفت الکترون پیوندی)

ت) با توجه به این‌که با افزایش کیفیت خودروها، CO_2 خارج شده از خودروها کاهش می‌یابد، می‌توان نتیجه گرفت میزان اثر گلخانه‌ای حاصل از آن‌ها کاهش یافته و بین دو مورد ذکر شده رابطهٔ معکوس وجود دارد.

ث) موازنهٔ تشکیل اوزون تروپوسفری به شکل زیر است:

$$NO_2 + O_2 \rightarrow NO + O_3$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴ و ۷۰ تا ۷۶)

۱۱۸- **گزینهٔ «۱»** *(علیرضا بیانی)*

با توجه به معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش زیر داریم:

$$4KNO_3(s) \rightarrow 2K_2O(s) + 2N_2(g) + 5O_2(g)$$

با فرض سؤال که واکنش به‌طور کامل انجام شده است می‌توان گفت به ازای مصرف ۴ مول KNO_3، ۲ مول K_2O تولید شده است که اختلاف جرم آن‌ها برابر است با:

$$(4\,mol\ KNO_3 \times \frac{101g\ KNO_3}{1\,mol\ KNO_3}) - (2\,mol\ K_2O \times \frac{94g\ K_2O}{1\,mol\ K_2O})$$

$$\text{اختلاف جرم} = 216g$$

و از طرفی چون شرایط سؤال STP نمی‌باشد باید حجم مولی گاز اکسیژن در شرایط جدید را محاسبه کنیم. طبق رابطهٔ زیر داریم:

$$T = \theta + 273 \Rightarrow T = 546 + 273 = 819K$$

$$\frac{P_1V_1}{\underbrace{T_1}_{STP}} = \frac{P_2V_2}{\underbrace{T_2}_{\text{جدید}}} \Rightarrow \frac{1\times 22/4}{273} = \frac{2\times V_2}{819} \Rightarrow V_2 = 33/6\,L.mol^{-1}$$

$$\text{اختلاف جرم } 5/4g \times \frac{5\,mol\ O_2}{\text{اختلاف جرم } 216g} \times \frac{33/6\,L\ O_2}{1\,mol\ O_2}$$

$$= 4/2\,L\ O_2$$

(شیمی ۱- ردپای گازها در زندگی؛ صفحه‌های ۶۲ تا ۷۴ و ۷۷ تا ۸۱)

۱۱۹- **گزینهٔ «۴»** *(آرمانی قنواتی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) تا سال ۲۰۲۵، ۶۶ درصد مردم جهان با کمبود آب روبه‌رو خواهند شد.

۲) در محلول‌ها، حالت فیزیکی و ترکیب شیمیایی در سرتاسر آن‌ها یکسان و یکنواخت است، اما در مخلوط آب و یخ، آب حالت مایع و یخ حالت جامد دارد؛ در نتیجه نمی‌تواند یک محلول محسوب شود.

۳) در یون چند اتمی SO_4^{2-}، بار الکتریکی -۲ به اتم خاصی تعلق ندارد بلکه متعلق به کل یون است.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۸۷ و ۹۱ تا ۹۴)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

با استفاده از غلظت یون SO_4^{2-} و جرم محلول، جرم مولی حل‌شونده را حساب می‌کنیم:

$$ppm = \frac{\text{جرم } SO_4^{2-}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 2400 = \frac{\text{جرم } SO_4^{2-}}{100} \times 10^6$$

$$\Rightarrow \text{جرم } SO_4^{2-} = 0/24g$$

با توجه به دو ظرفیتی بودن فلز X، فرمول شیمیایی سولفات آن به صورت XSO_4 و معادلهٔ انحلال آن در آب به صورت زیر است:

$$XSO_4(s) \xrightarrow{H_2O} X^{2+}(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$

بنابراین نسبت زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\text{جرم } SO_4^{2-}}{\text{جرم } XSO_4} = \frac{\text{جرم مولی } SO_4^{2-}}{\text{جرم مولی } XSO_4} \Rightarrow \frac{0/24}{0/37} = \frac{96}{\text{جرم مولی } X + 96}$$

$$\Rightarrow \text{جرم مولی } X + 96 = \frac{37\times 96}{24}$$

$$\Rightarrow \text{جرم مولی } X = 52g.mol^{-1}$$

فلز مربوطه با توجه به اطلاعات سؤال، $_{24}Cr$ می‌باشد.

(شیمی ۱- آب، آهنگ زندگی؛ صفحه‌های ۹۴ و ۹۵)

@master_Azmon

شیمی ۲

۱۲۱- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا پورجاوید)*

فقط عبارت سوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: اگر دو عنصر X و Y هم‌دوره باشند، بسته به این‌که در کجای جدول جای داشته باشند، ممکن است جزو هر کدام از دسته‌ها (فلزها، نافلزها و شبه‌فلزها) باشند.

عبارت دوم: اگر این دو عنصر در یک گروه و یا در یک دوره قرار می‌گرفتند، حتماً عنصر بزرگ‌تر (X)، دارای خاصیت فلزی بیشتری بود؛ اما از آنجایی که اطلاعاتی دربارهٔ موقعیت عنصرها در جدول، در عبارت ذکر نشده است، این عبارت همواره درست نیست.

عبارت سوم: در صورت هم‌گروه بودن دو عنصر، X پایین‌تر از Y قرار می‌گیرد (چرا که شعاع بزرگ‌تری دارد) و در نتیجه عدد اتمی بیشتری خواهد داشت.

عبارت چهارم: برای مقایسهٔ میزان واکنش‌پذیری شیمیایی عنصرها با یکدیگر لازم است ابتدا مشخص کنیم که در کدام دسته از عناصر (فلزها، نافلزها و شبه‌فلزها) قرار دارند. از آنجا که در خصوص این دو عنصر با توجه به اطلاعات داده شده چنین امکانی وجود ندارد، نمی‌توان مقایسه‌ای بین واکنش‌پذیری شیمیایی آن‌ها انجام داد.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۱۲۲- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین طیبی)*

ابتدا جرم Na_2O تولیدی در اثر واکنش Na و Fe_2O_3 را حساب می‌کنیم:

$$Fe_2O_3 + 6Na \rightarrow 3Na_2O + 2Fe$$

$$?\,g\ Na_2O : 64g \text{ نمونهٔ ناخالص} \times \frac{75g\ Fe_2O_3 \text{ خالص}}{100g \text{ نمونه}} \times \frac{1mol\ Fe_2O_3}{160g\ Fe_2O_3} \times \frac{3mol\ Na_2O}{1mol\ Fe_2O_3} \times \frac{62g\ Na_2O}{1mol\ Na_2O}$$

$$= 55/8g\ Na_2O$$

با توجه به این‌که جرم Na_2O تولیدی در این واکنش از کل جرم Na_2O تولیدی کمتر است، نتیجه می‌گیریم که ناخالصی‌ها نیز با Na واکنش داده‌اند. می‌دانیم ترتیب واکنش‌پذیری فلزات داده شده به صورت زیر است:

$$Rb > K > Na > Mg > Zn > Fe$$

در نتیجه Rb_2O و K_2O با Na واکنش نمی‌دهند. (رد گزینه‌های ۲ و ۴) گزینه‌های باقی‌مانده ZnO و MgO هستند که آن‌ها را به صورت XO فرض می‌کنیم.

$$XO + 2Na \rightarrow Na_2O + X$$

$$\text{جرم } Na_2O = 80/6 - 55/8 = 24/8g$$

$$?\,g\ Na_2O : 64g \text{ نمونهٔ ناخالص} \times \frac{25g\ XO}{100g \text{ نمونه ناخالص}}$$

$$\times \frac{1mol\ XO}{M\ g\ XO} \times \frac{1mol\ Na_2O}{1mol\ XO} \times \frac{62g\ Na_2O}{1mol\ Na_2O} = 24/8g\ Na_2O$$

$$\Rightarrow M = 40g.mol^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_{ZnO} = 65 + 16 = 81g.mol^{-1} & \text{غ ق} \\ M_{MgO} = 24 + 16 = 40g.mol^{-1} & \text{ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه اکسید مورد نظر MgO است.

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱۲۳- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا بیانی)*

عبارت سوم و پنجم نادرست است.

با توجه به فرض سؤال و این‌که جرم مولی آلکان و تعداد پیوندهای اشتراکی آلکان به ترتیب از رابطهٔ $14n+2$ و $3n+1$ پیروی می‌کند.

$$\frac{\text{جرم مولی}}{\text{تعداد پیوندهای اشتراکی}} = \frac{14n+2}{3n+1} = 4/5 \Rightarrow n = 5$$

آلکان مورد نظر ۵ کربن دارد؛ پس فرمول آن به صورت C_5H_{12} می‌باشد.

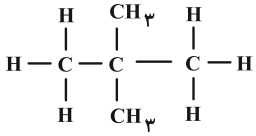
بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: آلکانی با ۵ کربن، اولین آلکان مایع در دمای اتاق می‌باشد؛ در نتیجه نقطه جوش آن از مابقی آلکان‌های مایع کمتر می‌باشد.

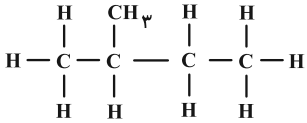
عبارت دوم: پنجمین عضو خانوادهٔ آلکن‌ها C_6H_{12} می‌باشد که با C_5H_{12} تعداد H برابری دارند.

عبارت سوم و پنجم: C_5H_{12} دارای ۳ ایزومر می‌باشد و نام ۳- متیل بوتان غلط است.

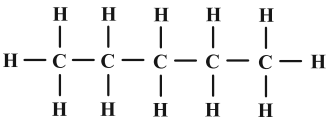
@master_Azmon



دی متیل پروپان



متیل بوتان



پنتان

عبارت چهارم: می‌دانیم که تقریباً $\frac{۱}{۵}$ حجم هوا را اکسیژن تشکیل می‌دهد.

$$C_۵H_{۱۲} + ۸O_۲ \rightarrow ۵CO_۲ + ۶H_۲O$$

$$۰/۱mol\ C_۵H_{۱۲} \times \frac{۸mol\ O_۲}{۱mol\ C_۵H_{۱۲}} \times \frac{۲۰L\ O_۲}{۱mol\ O_۲}$$

$$\times \frac{۱۰۰L\ \text{هوا}}{۲۰L\ O_۲} = ۸۰L\ \text{هوا}$$

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۳۹)

۱۲۴- **گزینهٔ «۲»** *(امیرحسین ملازینل)*

تنها مورد (پ) درست می‌باشد.

بررسی موارد:

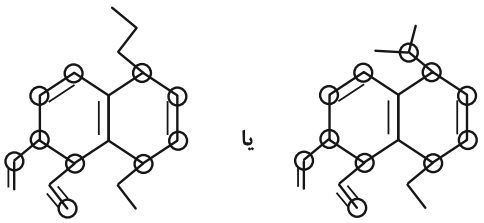
الف) ترکیب داده شده دارای دو حلقهٔ غیربنزنی بوده و آروماتیک نمی‌باشد.

ب) هیدروکربن داده شده دارای ۴ پیوند دوگانه و یک پیوند سه‌گانه می‌باشد؛ از این‌رو با ۶ مول گاز هیدروژن (نه ۸ مول!) به‌طور کامل سیر می‌شود.

$$۹/۶۳۲\times۱۰^{۲۴}\,H \times \frac{۱mol\ H}{۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}\,H} \times \frac{۱mol\ H_۲}{۲mol\ H} = ۸mol\ H_۲$$

پ) فرمول مولکولی ترکیب داده شده به صورت $C_{۱۹}H_{۲۴}$ می‌باشد؛ بنابراین ۲۴ اتم هیدروژن دارد. اوکتن $(C_۸H_{۱۶})$ نیز مجموعاً ۲۴ اتم دارد.

ت) طبق شکل زیر، در ترکیب داده شده، بیش از ۸ اتم کربن فقط به یک اتم هیدروژن متصل هستند. دقت شود که $C_۳H_۷$ دو حالت دارد:



یا

(شیمی ۲- قدر هدایای زمینی را بدانیم؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۱۲۵- **گزینهٔ «۲»** *(امیرعلی بیات)*

ابتدا باید واکنش دوم را موازنه کرد و ΔH آن را به کمک آنتالپی‌های پیوند محاسبه کرد:

$$۲NO + O_۲ \rightarrow ۲NO_۲$$

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [۲\Delta H_{(N=O)} + \Delta H_{(O=O)}]$$

$$-[۲\Delta H_{(N-O)} + ۲\Delta H_{(N=O)}] = \Delta H_{(O=O)} - ۲\Delta H_{(N-O)}$$

حال با جای‌گذاری اعداد جدول خواهیم داشت:

$$\Delta H_{۲\text{واکنش}} = ۴۹۵ - (۲\times۲۰۱) = ۹۳kJ.mol^{-۱}$$

حال براساس قانون هس خواهیم داشت:

$$N_۲ + O_۲ \rightarrow ۲NO \quad \Delta H = ۹۱/۲۹kJ.mol^{-۱}$$

$$+\ \ ۲NO + O_۲ \rightarrow ۲NO_۲ \quad \Delta H = ۹۳kJ.mol^{-۱}$$

$$N_۲ + ۲O_۲ \rightarrow ۲NO_۲ \quad \Delta H = ۹۳ + ۹۱/۲۹ \simeq ۱۸۴kJ.mol^{-۱}$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹ و ۷۴ تا ۷۷)

۱۲۶- **گزینهٔ «۳»** *(امیرعلی بیات)*

اختلاف جرم مولی گوگرد دی‌اکسید $(SO_۲)$ و اتیلن گلیکول $(CH_۲OHCH_۲OH)$ برابر $۲g.mol^{-۱}$ می‌باشد. در ساختار A و B هم فقط دو نوع گروه عاملی دیده می‌شود.

B ← گروه عاملی آلدهیدی و الکلی

A ← گروه عاملی استری و الکلی

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) هر دو ماده، به دلیل داشتن گروه هیدروکسیل $(-OH)$ می‌توانند با مولکول‌های خود پیوند هیدروژنی برقرار کنند.

۲) تعداد اتم‌های کربن مولکول A و B برخلاف تعداد اتم‌های اکسیژن آن‌ها با هم برابر است.

۴) حضور پیوند دوگانه در حلقه همیشه نشان‌دهندهٔ آروماتیک بودن ترکیب نیست.

ترکیب باید دارای ساختار باشد.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲ و ۸۴)

@master_Azmon

۱۲۷- **گزینهٔ «۳»** *(امیرحسین حسن‌نژاد)*

با افزایش دما، انحلال‌پذیری برخی نمک‌ها مانند Li_2SO_4 و $CaCl_2$ و انحلال‌پذیری گازها در آب کم می‌شود.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳ و ۹۶)

۱۲۸- **گزینهٔ «۱»** *(محمدرضا جمشیری)*

	$3A$	$\rightarrow$	B	$+$	$3C$
مول اولیه:	a		0		0
تغییرات مول:	$-3x$		$+x$		$+3x$
مول نهایی:	$a-3x$		x		$3x$

$$\bar{R}_A = -\frac{\Delta n_A}{\Delta t} \Rightarrow 0/3 = -\frac{\Delta n_A}{40} \Rightarrow \Delta n_A = -12\,mol$$

$$3x = 12 \Rightarrow x = 4\ mol$$

مول کل باقی‌مانده $\Rightarrow a-3x+x+3x = a+x = a+4$

$$a+4 = 17 \Rightarrow a = 13\,mol$$

$$\Rightarrow A \text{ گرم } : 13\,mol\ A \times \frac{39\,g\ A}{1\,mol\ A} = 507\,g\ A$$

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۳)

۱۲۹- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

قند موجود در جوانهٔ گندم (مالتوز) مطابق واکنش زیر به گلوکز تبدیل می‌شود:

$$C_{12}H_{22}O_{11}(aq) + H_2O(l) \rightarrow 2C_6H_{12}O_6(aq)$$

ابتدا لازم است جدول را تکمیل کنیم. در یک بازهٔ زمانی معین از یک واکنش، نسبت اندازهٔ تغییر غلظت مواد موجود در واکنش به ضریب استوکیومتری آن‌ها یکسان است.

حالا دو بازهٔ زمانی دلخواه را در نظر می‌گیریم تا a و b را به دست آوریم:

$$a = ? \Rightarrow (3-7)\,min \Rightarrow \frac{(a-0/02)}{\text{ضریب گلوکز}} = -\frac{(0/085-0/09)}{\text{ضریب مالتوز}}$$

$$\xrightarrow{(*)} a = 0/03\,mol.L^{-1}$$

$$b = ? \Rightarrow (0-1)\,min \Rightarrow \frac{(0/01-0)}{\text{ضریب گلوکز}} = -\frac{(0/095-b)}{\text{ضریب مالتوز}}$$

$$\xrightarrow{(*)} b = 0/1\,mol.L^{-1}$$

در نهایت می‌توان نسبت مورد نظر را حساب کرد:

$$\frac{\bar{R}\ (\text{مالتوز})(0-7)\,min}{\bar{R}\ (\text{گلوکز})(7-14)\,min} = \frac{-(\frac{(0/085-0/1)}{7-0})}{(\frac{0/04-0/03}{14-7})} = \frac{3}{2}$$

نکته: با توجه به برابر بودن حجم و زمان مد نظر، نسبت سرعت ۲ ماده با نسبت اندازهٔ تغییرات مول آن‌ها در زمان ذکر شده برابر است.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۳)

۱۳۰- **گزینهٔ «۳»** *(خرشید مرادی)*

موارد دوم و چهارم نادرست هستند.

با توجه به تغییرات غلظت مواد از شروع واکنش تا دقیقهٔ سوم (A شش مولار کاهش، B سه مولار کاهش و C نه مولار افزایش) درمی‌یابیم که فرم کلی واکنش به صورت $2A + B \rightarrow 3C$ بوده است.

مورد اول:

	$2A$	$+$	B	$\rightarrow$	$3C$
غلظت اولیه:	7		8		0
	$7-2x$		$8-x$		$+3x$

$$\text{لحظهٔ برابری غلظت } A, C \Rightarrow 7-2x = 3x \Rightarrow x = 1/4\,mol.L^{-1}$$

$$\text{مجموع غلظت واکنش‌دهنده‌ها در لحظهٔ برابری غلظت } A \text{ و } C = 7-2x+8-x$$

$$= 15-3x = 15-4/2 = 10/8\,mol.L^{-1}$$

مورد دوم: مادهٔ جامد در طی انجام واکنش شیمیایی تغییر غلظت ندارد، اما همان‌طور که می‌بینیم غلظت مادهٔ A در حال تغییر است.

مورد سوم:

	$2A$	$+$	B	$\rightarrow$	$3C$
غلظت اولیه:	7		8		0
	$\underbrace{7-2y}_{3}$		$\underbrace{8-y}_{6}$		$\underbrace{+3y}_{6}$

$$\text{لحظهٔ } m \Rightarrow 8-y = 3y \Rightarrow y = 2\,mol.L^{-1}$$

نکته: طبق قانون پایستگی جرم، جرم ظرف در همهٔ لحظات واکنش ثابت است، بنابراین کل جرم موجود در ظرف در لحظه‌های صفر و m برابر می‌باشد.

$$A \text{ درصد جرمی } = \frac{3\times20}{7\times20+8\times50}\times100 = \frac{60}{540}\times100$$

$$= \frac{1}{9}\times100 \simeq 11/11\%$$

مورد چهارم: اگر در پایان دقیقهٔ اول غلظت A به ۴/۲۵ مولار رسیده باشد، یعنی ۲/۷۵ مولار از غلظت آن کاهش یافته و با فرض این‌که در دقیقهٔ دوم هم همین مقدار از A مصرف بشود (که فرض اشتباهی است)، در مجموع دو دقیقه، ۵/۵ مولار از غلظت A کاسته و غلظت مادهٔ C تولید شده برابر با $(5/5\times\frac{3}{2})$ ۸/۲۵ خواهد بود. که یعنی امکان رسیدن غلظت مادهٔ C پس از دو دقیقه به این عدد وجود ندارد، زیرا همان‌طور که در شکل مشخص است (و غالب واکنش‌های طبیعت هم به همین شکل هستند)، با گذر زمان سرعت واکنش افت می‌کند و نمی‌تواند در دقیقهٔ دوم به اندازهٔ دقیقهٔ اول محصول تولید کند.

(شیمی ۲- در پی غذای سالم؛ صفحه‌های ۸۵ تا ۹۳)

@master_Azmon

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد
(دورهٔ دوم)
۲ آذر

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰
زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
ویراستار	فاطمه راسخ، حمیدرضا رحیم خانلو
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، فاطمه راسخ، سجاد محمدنژاد، حمید گنجی، فرزاد شیرمحمدلی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

@master_Azmon

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

واژه‌ی «شیّاد» است که متن را کامل می‌کند: جادوگر و شیّاد و نیرنگ‌باز.

(هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

کشور «آلمان» مدّنظر است که حرف سوم آن «م» است.

(هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

شکل درست جمله، «گاه ظلمانی است و گاه نورانی»، شش نقطه دارد.

(هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

جمله‌ی مدّنظر: «شیطان در فریفتن خلیفه‌ی خدا ناکام می‌ماند.»

کلمه‌ی بعد از «در»، «فریفتن» است.

(هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

احاطه: تسلّط

(هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۴» *(حمید اصفهانی)*

شکل درست بیت دوم:

«ترک دیوی کنی ملک باشی / ز شرف برتر از فلک باشی»

(هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

حرف اضافه‌ی «متّهم‌کردن»، «به» است نه «از»:

«متقابلاً یک‌دیگر را به آلودن و تباهیِ روحِ فاوست متّهم می‌کردند.»

(هوش کلامی)

۲۵۸- گزینهٔ «۳» *(حمید کنبی)*

حروف نقطه‌دار الفبای فارسی:

ب پ ت ث ج چ خ ذ ز ژ ش ض ظ غ ف ق ن ی ← ۱۸ تا

حرف بی‌نقطهٔ الفبای فارسی:

الف ح د ر س ص ط ع ک گ ل م و ه ی ← ۱۵ تا

با شرط صورت سؤال که دو حرف نقطه‌دارِ آن نباید در کنار هم قرار بگیرند، می‌توانیم دو حالت را درنظر بگیریم: ۱) حرف وسط بی‌نقطه باشد. ۲) حرف وسط نقطه‌دار و دو حرف دیگر بی‌نقطه باشند. همچنین توجه کنیم حرف «ی» در حالت «غیر آخر» نقطه‌دار است.

۱) تعداد لغات: $۳۲\times۱۴\times۳۲=۱۴۳۳۶$

۲) تعداد لغات: $۱۴\times۱۸\times۱۵=۳۷۸۰$

مجموع حالات: $۱۴۳۳۶+۳۷۸۰=۱۸۱۱۶$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۵۹- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرممدلی)*

در ستون سمت راست در ردیف سوم، قطعاً عدد ۴ قرار می‌گیرد، چرا که در آن ستون عددهای ۳ و ۵ هست و در ردیف وسط عددهای ۱ و ۲. با این حساب، علامت سؤال ردیف اول نیز قطعاً عدد ۲ است، چرا که در این ستون عددهای ۵، ۴ و ۳ و در ردیف نخست عدد ۱ هست: $۲+۴=۶$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۰- گزینهٔ «۳» *(فرزاد شیرممدلی)*

جدول را حل می‌کنیم:

ردیف سوم به عدد سه نیاز دارد. این عدد نمی‌تواند در ستون‌های چهارم و پنجم باشد، چرا که این ستون‌ها این عدد را در خود دارند. پس در ستون دوم این ردیف عدد ۳ را قرار می‌دهیم. با همین استدلال عددهای ۴ و ۵ را نیز در این ردیف می‌گنجانیم. عددهای ۱ و ۲ نیز به همین طریق در ستون پنجم قرار می‌گیرد. عدد ۳ در ستون اول، عدد ۱ در ستون چهارم و عدد ۳ در ردیف پنجم به همین ترتیب معلوم می‌شود، ولی خانه‌های باقی‌مانده نامعلومند.

	۱	۲	۳	۴	۵
۱		۱		۳	
۲		۵			
۳	۲		۱		
۴					۳
۵	۱				۵

→

	۱	۲	۳	۴	۵
۱		۱		۳	۲
۲	۳	۵			۱
۳	۲	۳	۱	۵	۴
۴				۱	۳
۵	۱		۳		۵

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۱» *(فرزاد شیرممدلی)*

فرض کنید عددِ ۵ در خانهٔ بالا چپ قرار بگیرد. عدد ۴ در تنها خانهٔ باقی‌مانده در ردیف نخست و در تنها خانهٔ باقی‌مانده در ستونِ نخست قرار می‌گیرد. در ستون دوم هم جایگاه عددهای ۴ و ۲ معلوم می‌شود. در ستون سوم جایگاه عددهای ۲ و ۵ و در ستون چهارم جایگاه عددهای ۲ و ۴ معلوم می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۵	۱		۳	۲
۲	۳	۵			۱
۳	۲	۳	۱	۵	۴
۴				۱	۳
۵	۱		۳		۵

→

	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۵	۱	۴	۳	۲
۲	۳	۵	۲	۴	۱
۳	۲	۳	۱	۵	۴
۴	۴	۲	۵	۱	۳
۵	۱	۴	۳	۲	۵

(هوش منطقی ریاضی)

@master_Azmon

۲۶۲- گزینهٔ «۲» *(فاطمه راسخ)*

می‌توان گفت در الگوی صورت سؤال، همهٔ عددها یک واحد بیش‌تر از دوبرابر عدد قبلی است. معلوم است که عدد نخست انتخابی بوده است:

$$۲ \xrightarrow{\times ۲+۱} ۵ \xrightarrow{\times ۲+۱} ۱۱$$

پس الگو به این شکل ادامه می‌یابد:

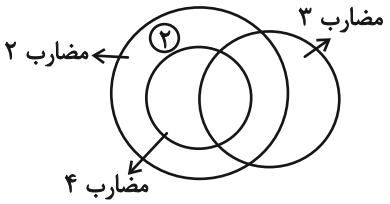
$$۲,۵,۱۱,۲۳,۴۷,۹۵,۱۹۱,۳۸۳,۷۶۷,۱۵۳۵$$

سومین عددِ سمتِ راستِ عدد ۴۷، عدد ۳۸۳ است که دومین عددِ سمتِ چپِ عدد ۱۵۳۵ است.

(هوش ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۱» *(فاطمه راسخ)*

در الگوی صورت سؤال، اعداد مضرب ۲، اعداد مضرب ۳ و اعداد مضارب ۴ در سه دایره رسم شده‌اند. دقت کنید عددهای مضرب ۴، همگی مضرب ۲ هم هستند، ولی نه برعکس. با این حساب، عدد ۲ باید بیرون از دستهٔ اعداد مضرب ۴ قرار بگیرد.



(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۴- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

الگوی ثابت:

$$(۶+۹)\div ۵=۳,۳+۵=۸,۸+۵=۱۳$$
$$(۱۰+۱۴)\div ۸=۳,۳+۸=۱۱,۱۱+۸=۱۹$$
$$(۶+۶)\div ۱۲=۱,۱+۱۲=۱۳,۱۳+۱۲=۲۵$$
$$(۷+۵)\div ۳=۴,۴+۳=۷,۷+۳=۱۰\neq ۱۱$$

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۵- گزینهٔ «۴» *(سپهر محمدنژاد)*

$$۱۰۱۷\div ۳=۳۳۹$$
$$۲۵۶۴\div ۴=۶۴۱$$
$$۳۲۱۰\div ۵=۶۴۲$$

و داریم: $۶\times ۸۰۹=۴۸۵۴$

(هوش منطقی ریاضی)

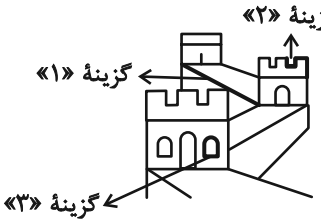
۲۶۶- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

این قسمت مشخص‌شدهٔ شکل گزینهٔ «۳» در شکل صورت سؤال نیست:

(هوش غیرکلامی)

۲۶۷- گزینهٔ «۴» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

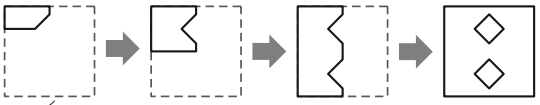
قسمت‌هایی که در شکل‌های دیگر گزینه‌ها نیست:



(هوش غیرکلامی)

۲۶۸- گزینهٔ «۱» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

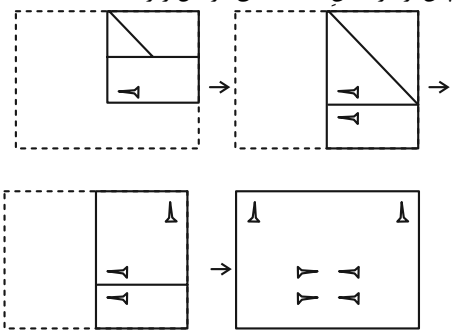
مراحلِ تا را پس از طرح و برش، برعکس طی می‌کنیم:



(هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

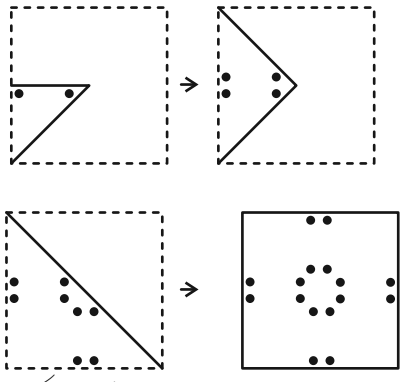
شکل صورت سؤال پس از باز شدنِ کاغذ، طبق مراحل زیر:



(هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۴» *(سپهر محمدنژاد)*

مراحلِ باز شدنِ کاغذ گزینهٔ پاسخ و تبدیل به شکل صورت سؤال پس از سوراخ شدن:



(هوش غیرکلامی)

@master_Azmon