دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۱۸ آبان ۱۴۰۳

اختصاصی دوازدهم ریاضی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	کاظم اجلالی-سیدرضا اسلامی-داود بوالحسنی-سهیل تقی‌زاده-رضا جعفری-افشین خاصه‌خان-احمدرضا ذاکرزاده محمدرضا راسخ-ستار زواری-مهسان گودرزی-حامد معنوی-جهانبخش نیکنام
	هندسه	امیرحسین ابومحبوب-اسحاق اسفندیار-فاطمه برزویی-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-فرزانه خاکپاش-سوگند روشنی-هومن عقیلی احمدرضا فلاح-مهرداد ملوندی-نیما مهندس
	ریاضیات گسسته	امیرحسین ابومحبوب-سیدمحمدرضا حسینی‌فرد-افشین خاصه‌خان-سوگند روشنی-علیرضا شریف‌خطیبی-احمدرضا فلاح
	فیزیک	مهران اسماعیلی-حسین الهی-بهزاد آزادفر-زهره آقامحمدی-علی برزگر-علیرضا جباری-مسعود خندانی-پوریا علاقه‌مند سیاوش فارسی-محمد مقدم-محمدکاظم منشادی-سیدمحمدعلی موسوی-امیراحمد میرسعید-حسام نادری-مجتبی نکوئیان
	شیمی	هدی بهاری‌پور-امیرعلی بیات-محمدرضا پورجاوید-سعید تیزرو-محمدرضا جمشیدی-امیرحاتمیان-حمید ذبحی-یاسر راش روزبه رضوانی-محمدرضا طاهری‌نژاد-امیرحسین طیبی-محمد عظیمیان‌زواره-آرمان قنواتی-امیرمحمد کنگرانی-محسن مجنونی فرشید مرادی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	سیدرضا اسلامی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	حسام نادری	ایمان حسین نژاد
گروه ویراستاری	امیرحسین ابومحبوب سهیل تقی‌زاده	امیرحسین ابومحبوب مهید خالتی امیرمحمد کریمی محمد خندان	امیرحسین ابومحبوب مهید خالتی امیرمحمد کریمی محمد خندان	بهنام شاهنی زهره آقامحمدی	محمدحسن محمدزاده مقدم احسان پنجه‌شاهی امیرحسین کمره ای
ویراستاری رتبه های برتر	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان سیدماهد عبدی‌کوهی محمدپارسا سبزه‌ای	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان امیرحسین ربیعیان	امیرحسین ملازینل سپهر متولیان امیرحسین ربیعیان	سینا صالحی ماهان فرهمندفر	آرمان قنواتی امیرحسین ملازینل
بازنویسی آزمون	سهیل تقی‌زاده	امیرحسین ملازینل	امیرحسین ملازینل	سینا صالحی	آرمان قنواتی
مسئول درس	مهرداد ملوندی	سرژ یقیازاریان تبریزی	سرژ یقیازاریان تبریزی	حسام نادری	امیرعلی بیات
مستندسازی	سمیه اسکندری	عادل حسینی	الهه شهبازی	علیرضا همایون‌خواه	امیرحسین توحیدی
ویراستاران(مستندسازی)	احسان صادقی-سجاد سلیمی-علیرضا عباسی‌زاهد			مهدی گنجی‌وطن سیدکیان ملکی ابراهیم نوری	سجاد رضایی محمدصدرا وطنی ملینا ملائی

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	مهرداد ملوندی	
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده	
گروه مستندسازی	مدیر گروه: محیا اصغری	مسئول دفترچه: الهه شهبازی
حروفنگار	فرزانه فتح الهزاده	
ناظر چاپ	سوران نعیمی	

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

حسابان ۲

۱- گزینهٔ «۱» *(سهیل تقی‌زاده)*

با توجه به قضیهٔ تقسیم داریم:

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)\Rightarrow f(x)=(x-۱)q(x)+۵ \qquad (۱)$$

طبق فرض سؤال خارج قسمت تقسیم، بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$q(-۲)=۰ \qquad (۲)$$

$$\left.\begin{array}{l}(۱),(۲): f(-۲)=۵\Rightarrow -۸+۴a-۲b-۱=۵\\ \Rightarrow ۲a-b=۷\\ (۱):\ f(۱)=۵\Rightarrow ۱+a+b-۱\Rightarrow a+b=۵\end{array}\right\}\Rightarrow a=۴\ ,\ b=۱$$

$$f(\frac{ab}{۲})=f(\frac{۴\times ۱}{۲})=f(۲)=۸+۱۶+۲-۱=۲۵$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۲- گزینهٔ «۳» *(داور بوالحسنی)*

ابتدا قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$f(۱-x)=(x-۲)Q(x)+R\xrightarrow{x=۲}f(-۱)=R$$

حال طبق فرض داریم:

$$f(x)=\frac{x^{۱۶}-۱}{۲(x+۱)}\ ,\ (x\neq -۱)$$

چون f یک چندجمله‌ای است، پس در تمام نقاط (حتی $x=-۱$ که ریشهٔ مخرج است) پیوسته است، یعنی:

$$f(-۱)=\lim_{x\to -۱}f(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{x^{۱۶}-۱}{۲(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^{۱۵}-x^{۱۴}+x^{۱۳}-...-۱)}{۲(x+۱)}$$

$$=\frac{۱}{۲}(-۱-۱-۱-...-۱)=\frac{۱}{۲}(-۱۶)=-۸\Rightarrow R=-۸$$

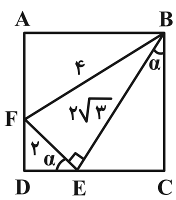
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۳- گزینهٔ «۱» *(محمدرضا راسخ)*

با توجه به این‌که $\overset{\Delta}{BEF}$ قائم‌الزاویه است، داریم:

$$BE^{۲}+EF^{۲}=BF^{۲}\Rightarrow BE^{۲}+۲^{۲}=۴^{۲}\Rightarrow BE=۲\sqrt{۳}$$

حال با توجه به شکل زیر داریم:



$$\left\{\begin{array}{l}BC=۲\sqrt{۳}\cos\alpha\\ CE=۲\sqrt{۳}\sin\alpha\\ DE=۲\cos\alpha\end{array}\right.\xrightarrow{BC=CE+DE}$$

$$۲\sqrt{۳}\cos\alpha=۲\sqrt{۳}\sin\alpha+۲\cos\alpha$$

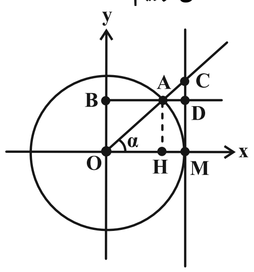
$$\Rightarrow (۲\sqrt{۳}-۲)\cos\alpha=۲\sqrt{۳}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \cot\alpha=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}-۲}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۲}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴- گزینهٔ «۲» *(حامد معنوی)*

ابتدا طول OH را به دست می‌آوریم:



$$\left.\begin{array}{l}OH=AB\\ HM=AD\end{array}\right\}\xrightarrow{AB=۲AD}OH=۲HM \qquad (۱)$$

$$OM=OH+HM=۱\xrightarrow{(۱)}OH+\frac{OH}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow OH=\frac{۲}{۳}$$

از طرفی می‌دانیم $OH=\cos\alpha$ و $CD=\tan\alpha-\sin\alpha$، بنابراین:

$$\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha\xrightarrow[\cos\alpha=\frac{۲}{۳}]{۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}}\sin\alpha=\sqrt{۱-(\frac{۲}{۳})^{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

$$CD=\tan\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۲}-\frac{\sqrt{۵}}{۳}=\frac{\sqrt{۵}}{۶}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

(حسابان ۲- مثلثات: صفحهٔ ۲۹)

۵- گزینهٔ «۴» *(سیدرضا اسلامی)*

ابتدا زاویه‌ای که چرخ عقب (B) می‌چرخد را محاسبه می‌کنیم:

$$L=R\alpha\Rightarrow ۹۴/۲=۳۵\times\alpha\Rightarrow \alpha=\frac{۹۴/۲}{۳۵}rad$$

از آنجا که چرخ عقب (B) و چرخ دنده متصل به آن (D) دو دایره هم‌مرکز هستند، چرخ دندهٔ D نیز $\frac{۹۴/۲}{۳۵}rad$ می‌چرخد. همچنین دو چرخ دندهٔ C و D به وسیلهٔ زنجیر چرخ به هم متصل بوده و مسافت یکسانی از زنجیر چرخ را می‌پیمایند:

$$R_{۱}\theta_{۱}=R_{۲}\theta_{۲}\Rightarrow ۱۰\times\frac{۹۴/۲}{۳۵}=۱۵\times\theta_{۲}$$

$$\Rightarrow \theta_{۲}=\frac{۱۰\times ۹۴/۲}{۱۵\times ۳۵}=\frac{۳/۱۴\times ۳۰۰}{۲۵\times ۷\times ۳}=\frac{۴\pi}{۷}rad$$

توجه: شعاع چرخ جلو در محاسبات تأثیری ندارد و عملاً دادهٔ اضافی به حساب می‌آید.

(حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

۶- گزینهٔ «۴» *(سیدرضا اسلامی)*

طرفین رابطه را بر $\cos^{۳}x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۵\tan^{۳}x+۳\frac{۱}{\cos^{۲}x}=۵+۵\tan x\times\frac{۱}{\cos^{۲}x}$$

$$\Rightarrow ۵\tan^{۳}x+۳(۱+\tan^{۲}x)=۵+۵\tan x(۱+\tan^{۲}x)$$

$\Rightarrow 5\tan^3 x+3\tan^2 x+3=5\tan^3 x+5\tan x+5$

$\Rightarrow 3\tan^2 x-5\tan x-2=0\Rightarrow \tan x=2\ ,\ -\frac{1}{3}$

پس A هم دو مقدار می‌تواند داشته باشد:

$A=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$A=-\frac{1}{3}-3=-\frac{10}{3}$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

۷- **گزینهٔ «۱»** (ستار زواری)

$$y=a\cos(\frac{b\pi x}{2}+\frac{\pi}{2})=-a\sin(\frac{b\pi x}{2})$$

با توجه به این که نمودار تابع در مبدأ صعودی است:

$(-a)(b)>0$ (چرا؟) $\Rightarrow ab<0$ (۱)

از طرفی با توجه به این‌که بیشترین مقدار تابع ۳ است، $|a|=3$.

$$6=\frac{3T}{4}\Rightarrow T=8=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}|b|}\Rightarrow |b|=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a=3\xrightarrow{(1)}b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a-b=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\\ a=-3\xrightarrow{(1)}b=\frac{1}{2}\Rightarrow a-b=-3-\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}\end{cases}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۸- **گزینهٔ «۴»** (حامد معنوی)

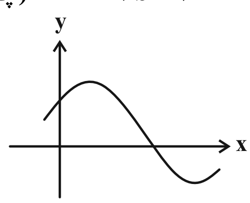
توجه کنید که $BC=T$ و ارتفاع وارد بر ضلع BC همان اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)$ است. بنابراین:

$$S_{ABC}=2\pi\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{|b|}\times(2|-2|)=2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|b|}=1\Rightarrow |b|=2$$

شکل زیر نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ را در همسایگی $x=0$ نشان می‌دهد که صعودی است. با توجه به شکل صورت سؤال، نمودار تابع $f(x)=-2\cos(bx-\frac{\pi}{4})+c$ در همسایگی راست $x=0$ نزولی است، پس:

$(-2)(b)<0$ (چرا؟) $\xrightarrow{|b|=2}b=2$



$$\Rightarrow f(x)=-2\cos(2x-\frac{\pi}{4})+c$$

از طرفی با توجه به این‌که $f(\frac{35\pi}{24})=0$، می‌نویسیم:

$$f(\frac{35\pi}{24})=-2\cos(2\times\frac{35\pi}{24}-\frac{\pi}{4})+c=0$$

$$\Rightarrow -2\cos(\frac{8\pi}{3})+c=0\Rightarrow -2\cos(2\pi+\frac{2\pi}{3})+c=0$$

$$\Rightarrow -2(-\frac{1}{2})+c=0\Rightarrow c=-1\Rightarrow c-b=-1-2=-3$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۹- **گزینهٔ «۱»** (رضا جعفری)

از آنجایی که $0<c<\frac{\pi}{2}$ است، تابع $y=\sin(x+c)$ در همسایگی $x=0$ صعودی است و چون طبق نمودار صورت سؤال، تابع $f(x)=a\sin(bx+c)$ در همسایگی $x=0$ نزولی است، پس:

$ab<0\xrightarrow{b>0}a<0$ (۱)

$$y_{max}=|a|=\frac{1}{3}\xrightarrow{(1)}a=-\frac{1}{3}$$

$$2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}=\frac{T}{4}\Rightarrow T=3=\frac{2\pi}{|b|}$$

$$\Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{b>0}b=\frac{2\pi}{3}$$

همچنین با توجه به نمودار داریم:

$$f(\frac{5}{4})=0\Rightarrow -\frac{1}{3}\sin(\frac{2\pi}{3}\times\frac{5}{4}+c)=0$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{5\pi}{6}+c)=0\xrightarrow{0<c<\frac{\pi}{2}}c=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c}=\frac{(-\frac{1}{3})(\frac{2\pi}{3})}{\frac{\pi}{6}}=-\frac{4}{3}$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۰- **گزینهٔ «۲»** (جهانبخش نیکنام)

$$2T=\frac{9\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\Rightarrow 2T=\pi\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow |b|=2$$

چون در همسایگی صفر تابع نزولی است، پس $b<0$ است (چرا؟)، یعنی $b=-2$.

$$f(x)=a-\tan 2x\Rightarrow f(\frac{\pi}{8})=0\Rightarrow a-\tan\frac{\pi}{4}=0\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(x)=1-\tan 2x$$

$$(a-b)\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}\Rightarrow f(\frac{3\pi}{8})=1-\tan 2(\frac{3\pi}{8})$$

$$=1-\tan\frac{3\pi}{4}=1-(-1)=2$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحهٔ ۳۲)

ریاضی پایه

۱۱- گزینهٔ «۲» (رضا جعفری)

می‌دانیم اگر a ریشهٔ n اُم b باشد، آن‌گاه: $b=a^n$

بنابراین: $729=a^6\xrightarrow{a<0}a=-\sqrt[6]{729}=-3$

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۸)

۱۲- گزینهٔ «۱» (جهانبخش نیکنام)

ابتدا $a=-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ را به شکل زیر ساده می‌کنیم:

$$a=-\sqrt{7-4\sqrt{3}}=-\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=-|2-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-2$$

اکنون داریم:

$$a-5a^{-1}+2=\sqrt{3}-2-\frac{5}{\sqrt{3}-2}+2$$

$$=\sqrt{3}+\frac{5}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}+5(\sqrt{3}+2)=10+6\sqrt{3}$$

و در نهایت ریشهٔ سوم $10+6\sqrt{3}$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}=\sqrt{3}+1$$

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۸)

۱۳- گزینهٔ «۲» (سیدرضا اسلامی)

اگر فرض کنیم پس از هر ۲۰ دقیقه، جرم باکتری‌ها b برابر می‌شود، پس از دو ساعت (۱۲۰ دقیقه) جرم باکتری‌ها b^6 برابر خواهد شد. بنابراین:

$$b^6=2\Rightarrow b=\sqrt[6]{2}$$

از طرفی با توجه به این‌که ۲۶۰ دقیقه معادل ۱۳ تا ۲۰ دقیقه است، جرم باکتری‌ها پس از ۲۶۰ دقیقه b^{13} برابر می‌شود. بنابراین:

$$b^{13}=(\sqrt[6]{2})^{13}=2^{\frac{13}{6}}=2^2\times2^{\frac{1}{6}}=4\sqrt[6]{2}$$

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

۱۴- گزینهٔ «۲» (داور بوالحسنی)

با توجه به این‌که $0<a<1$ است، پس $a<\sqrt[4]{a}<\sqrt[5]{a}<\sqrt[6]{a}$.

بنابراین:

$$\begin{cases}z=\sqrt[4]{a}\\ y=\sqrt[5]{a}\\ x=\sqrt[6]{a}\end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم هر عدد مثبت دارای دو ریشه با مرتبهٔ زوج (ریشهٔ دوم، چهارم، ششم و ...) است که قرینهٔ یکدیگرند. پس:

$$\begin{cases}m=-\sqrt[4]{a}\\ n=-\sqrt[6]{a}\end{cases}$$

حال درستی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $m+z=-\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}=0=-\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{a}=n+x$

۲) $\left.\begin{array}{l}z+n=\sqrt[4]{a}-\sqrt[6]{a}<0\\ m+x=-\sqrt[4]{a}+\sqrt[6]{a}>0\end{array}\right\}\Rightarrow z+n<m+x$

۳) $m+x=-\sqrt[4]{a}+\sqrt[6]{a}>0$

۴) $n+y=-\sqrt[6]{a}+\sqrt[5]{a}<0$

پس گزینهٔ «۲» نادرست است.

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۴۷ تا ۵۸)

۱۵- گزینهٔ «۴» (احمدرضا ذاکرزاده)

مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\frac{3}{(\sqrt[3]{2}+1)^2}\times\frac{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^2}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^2}=\frac{3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)^2}{\left((\sqrt[3]{2})^3+1\right)^2}$$

$$=\frac{3(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1-2\sqrt[3]{8}+2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2})}{3^2}$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1-4+2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}}{3}=\frac{3\sqrt[3]{4}-3}{3}=\sqrt[3]{4}-1$$

پس $a=4$.

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱۶- گزینهٔ «۱» (افشین خاصه‌خان)

با توجه به اتحاد $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$، داریم:

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x-x^2}+\sqrt[3]{x^2-4x+4})$$

$$= x+(2-x)=2 \xrightarrow{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=1}$$

$$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x-x^2}+\sqrt[3]{x^2-4x+4}=2$$

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱۷- گزینهٔ «۲» (مهسان گودرزی)

$$0<x<1 \Rightarrow \frac{1}{x}>x \Rightarrow x-\frac{1}{x}<0 \qquad (1)$$

با توجه به اتحاد $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ داریم:

$$(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2=18-2=16 \xrightarrow{(1)} x-\frac{1}{x}=-4$$

حال با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ داریم:

$$x^3-\frac{1}{x^3}=(x-\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}+1)$$

$$=(-4)(18+1)=-4\times 19=-76$$

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱۸- گزینهٔ «۲» (محمدرضا راسخ)

روش اول: $ab+ac+bc=\dfrac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}=-4$

$$(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2=(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)$$

$$=(-4)^2-2abc(0)=16$$

$$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2\left((ab)^2+(ac)^2+(bc)^2\right)$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=8^2-2(16)=32$$

روش دوم: با در نظر گرفتن $c=0$، داریم:

$$a+b=0 \Rightarrow b=-a \qquad (*)$$

$$a^2+b^2=8 \xrightarrow{(*)} 2a^2=8 \Rightarrow a^2=b^2=4$$

در نتیجه:

$$a^4+b^4+c^4=16+16+0=32$$

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۱۹- گزینهٔ «۴» (سیدرضا اسلامی)

به ازای $b=0$، عبارت داده شده را تجزیه می‌کنیم:

$$A=2a^2-2b^2+3ab-a+3b-1$$

$$\xrightarrow{b=0} A=2a^2-a-1=(2a+1)(a-1)$$

به ازای $b=0$، گزینه‌های «۱» و «۲» یعنی عامل $a+1$ در عبارت A وجود ندارد. بنابراین یکی از گزینه‌های «۳» و «۴» پاسخ درست است. این کار را به ازای $a=0$ نیز انجام می‌دهیم:

$$A=2a^2-2b^2+3ab-a+3b-1 \xrightarrow{a=0}$$

$$A=-2b^2+3b-1=(b-1)(-2b+1)$$

به ازای $a=0$، عامل $b+1$ در عبارت A وجود ندارد. پس گزینهٔ «۳» نیز رد می‌شود. تجزیهٔ عبارت داده شده به صورت زیر است:

$$A=(2a-b+1)(2b+a-1)$$

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

۲۰- گزینهٔ «۲» (کاظم اجلالی)

با فرض $A=a^{-\frac{1}{6}}$ و $B=b^{\frac{1}{6}}$، تساوی‌های داده شده به این صورت درمی‌آیند:

$$\begin{cases} B^2=A^3-4 \\ B^3=A^2+4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}} \Rightarrow A^3-B^3+A^2-B^2=0$$

$$\Rightarrow (A-B)(A^2+AB+B^2)+(A-B)(A+B)=0$$

$$\Rightarrow (A-B)(A^2+B^2+AB+A+B)=0$$

با توجه به این‌که $A\,,B>0$ هستند، عبارت پرانتز دوم مثبت می‌باشد، بنابراین: $A=B$

$$B^2=A^3-4 \xrightarrow{A=B} B^2=B^3-4 \Rightarrow B^3-B^2-4=0$$

$$B^3-8-(B^2-4)=0$$

$$\Rightarrow (B-2)(B^2+2B+4)-(B-2)(B+2)=0$$

$$(B-2)(B^2+B+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} B=2 \\ B^2+B+2=0 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در نتیجه: $b^{\frac{1}{6}}=2 \Rightarrow b^{\frac{1}{3}}=4 \Rightarrow b^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{6}}=4-2=2$

(ریاضی ۱- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۷)

هندسه ۳

۲۱- **گزینهٔ «۱»** (نیما مهندس)

ابتدا دستگاه را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۲-k)x+y=۰\\ -۳x+ky=۲\end{cases}$$

معادله در صورتی بی‌شمار جواب دارد که تساوی $\frac{۲-k}{-۳}=\frac{۱}{k}=\frac{۰}{۲}$ برقرار باشد، ولی به وضوح معادلهٔ $\frac{۱}{k}=\frac{۰}{۲}$ فاقد جواب است، پس این دستگاه به ازای هیچ مقدار k، بی‌شمار جواب ندارد.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۶)

۲۲- **گزینهٔ «۱»** (سوگند روشنی)

ابتدا شرط جواب نداشتن دستگاه اول را می‌نویسیم:

$$\frac{k}{۴}=\frac{-۱}{-k}\neq\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{k}{۴}=\frac{۱}{k}\Rightarrow k^۲=۴\Rightarrow k=\pm ۲$$

$$k=۲\Rightarrow \frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$ غ ق ق

$$k=-۲\Rightarrow -\frac{۲}{۴}\neq\frac{۱}{۲}$$ ق ق

پس $k=-۲$ است. حال این مقدار را در دستگاه دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}-۲x-۳y=۱\\ ۴x-۶y=m+۳\end{cases}$$

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را با A نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۴ & -۶\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-۲)(-۶)-(-۳)\times ۴=۲۴\neq ۰$$

پس این دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۶)

۲۳- **گزینهٔ «۴»** (احمدرضا فلاح)

دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ از دو خط تشکیل شده است. اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$، شیب دو خط یکسان نبوده و متقاطع هستند. در صورتی که $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، دو خط شیب یکسان و عرض از مبدأ متفاوت دارند، پس موازی و غیرمنطبق هستند و چنانچه $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، شیب و عرض از مبدأ دو خط یکسان است و دو خط بر هم منطبق هستند.

$$m=۴\Rightarrow\begin{cases}x-۴y=۸\\ ۴(x-y)=۴(y+۴)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-۴y=۸\\ x-۲y=۴\end{cases}$$

از آنجا که $\frac{-۴}{-۲}\neq\frac{۱}{۱}$، دو خط متقاطع هستند. از طرفی شیب خط اول برابر $\frac{۱}{۴}$ و شیب خط دوم برابر $\frac{۱}{۲}$ است و از آنجا که $\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\neq -۱$، پس دو خط بر هم عمود نیستند.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۶)

۲۴- **گزینهٔ «۳»** (سوگند روشنی)

وارونِ وارون یک ماتریس، برابر خود آن ماتریس است، پس کافی است وارونِ وارون ماتریس ضرایب دستگاه را به دست آورده و در ماتریس مجهولات ضرب کنیم.

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵}\end{bmatrix}\xrightarrow{((A^{-۱})^{-۱})=A}A=\frac{۱}{-\frac{۱}{۵}}\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۵} & -\frac{۲}{۵}\\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$AX=B\Rightarrow B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ ۳\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس مقادیر معلوم دستگاه، برابر $۴+۳=۷$ است.

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۲۵- گزینهٔ «۲» *(فرزانه فاکپاش)*

دستگاه معادلات دو معادله دو مجهول در صورتی جواب منحصر به فرد دارد که دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد. بنابراین دستگاهی به ازای تمام مقادیر حقیقی m دارای جواب منحصر به فرد است که دترمینان آن همواره مخالف صفر باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $$A=\begin{bmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -m^2+1=0 \Rightarrow m=\pm 1$$

۲) $$A=\begin{bmatrix} m & -1 \\ 3 & m-2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = m(m-2)+3=m^2-2m+3=0$$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ معادله فاقد ریشه حقیقی است.

۳) $$A=\begin{bmatrix} m^2 & 4 \\ m-1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = m^2-4(m-1)=m^2-4m+4=0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2=0 \Rightarrow m=2$$

۴) $$A=\begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m+2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (m+2)-m^2=-m^2+m+2=0$$

$$\Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$$

بنابراین دستگاه معادلات گزینهٔ «۲» به ازای تمام مقادیر حقیقی m، دارای جواب منحصر به فرد است.

(هندسه ۳- صفحهٔ ۲۶)

۲۶- گزینهٔ «۳» *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا معادلاتی که فاقد m و n هستند را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x+5y=3 \\ 2x-3y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

با جای‌گذاری در معادلات دیگر داریم:

$$\begin{cases} x+2my=4 \\ mx-ny=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2m=4 \Rightarrow m=-1 \\ 2m+n=m \Rightarrow m+n=0 \\ \xrightarrow{m=-1} n=1 \end{cases}$$

بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با: $n-m=1-(-1)=2$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۲۷- گزینهٔ «۲» *(امیرحسین ابومحبوب)*

طرفین رابطهٔ ماتریسی را از سمت چپ در ماتریس A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$AX=A^{-1}-A \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(A^{-1}-A)$$

$$\Rightarrow X=(A^{-1})^2-I$$

حال ماتریس A^{-1} را محاسبه کرده و در رابطه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{3}}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}-I=\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -45 & 18 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -45 & 17 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس X برابر است با:

$$12-5-45+17=-21$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۲۸- **گزینهٔ «۴»** (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا به کمک رابطهٔ داده شده، ماتریس A^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 - 3A + 2I = \bar{O} \Rightarrow -A^2 + 3A = 2I$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}A^2 + \frac{3}{2}A = I \Rightarrow A\underbrace{(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I)}_{A^{-1}} = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I \qquad (*)$$

حال طرفین معادلهٔ $AX = A - I$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(A - I)$$

$$\Rightarrow X = I - A^{-1} \xrightarrow{(*)} = I - (-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I)$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}(A - I)$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۲۹- **گزینهٔ «۴»** (هومن عقیلی)

طرفین تساوی را از سمت چپ در ماتریس A^{-1} و از سمت راست در ماتریس B^{-1} ضرب می‌کنیم. بنابراین لازم است ماتریس‌های A^{-1} و B^{-1} را پیدا کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AXB = C \Rightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1} = (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}CB^{-1}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس X برابر است با:

$$3 - 9 - 2 + 6 = -2$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

۳۰- **گزینهٔ «۲»** (امیرحسین ابومحبوب)

ابتدا از ماتریس A در سمت چپ تساوی فاکتور می‌گیریم:

$$A \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + A \times 3I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

طرفین تساوی را از راست در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ ضرب می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$$

برای دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر و هم‌مرتبهٔ C و D، رابطهٔ $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$ برقرار است، پس با وارون کردن طرفین رابطهٔ فوق داریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حال جواب‌های دستگاه را به دست می‌آوریم:

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow x + y = -2$$

(هندسه ۳- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۵)

ریاضیات گسسته

۳۱- گزینهٔ «۲» *(امیرحسین ابومحبوب)*

می‌دانیم از هر سه عدد متوالی، یکی بر ۳ بخش‌پذیر است. حال فرض کنیم $a \overset{3}{\equiv} k$، در این صورت داریم:

بررسی گزینه‌ها:

۱) $\begin{cases} a+2 \overset{3}{\equiv} k+2 \\ a+4 \overset{3}{\equiv} k+4 \overset{3}{\equiv} k+1 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a+3 \overset{3}{\equiv} k+3 \overset{3}{\equiv} k \\ a+6 \overset{3}{\equiv} k+6 \overset{3}{\equiv} k \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a+5 \overset{3}{\equiv} k+5 \overset{3}{\equiv} k+2 \\ a+10 \overset{3}{\equiv} k+10 \overset{3}{\equiv} k+1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} a+7 \overset{3}{\equiv} k+7 \overset{3}{\equiv} k+1 \\ a+14 \overset{3}{\equiv} k+14 \overset{3}{\equiv} k+2 \end{cases}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴»، سه عدد داده شده با اعداد متوالی k، $k+1$ و $k+2$ به پیمانهٔ ۳ هم‌نهشت هستند، پس یکی قطعاً بر ۳ بخش‌پذیر است. به عنوان مثال نقض گزینهٔ «۲»، می‌توان $a=1$ را در نظر گرفت که هیچ کدام از اعداد ۱، ۴ و ۷ بر ۳ بخش‌پذیر نیستند.

(ریاضیات گسسته - مشابه تمرین ۱۳ صفحهٔ ۱۷)

۳۲- گزینهٔ «۳» *(افشین خاصه‌خان)*

ابتدا !۱۰ را به عامل‌های اول آن تجزیه می‌کنیم:

$$10! = 1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$$

$$= 2^8\times3^4\times5^2\times7$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار طبیعی m، برای این‌که $10!\times m$ مربع کامل شود، برابر ۷ است.

$$a \overset{7}{\equiv} b \Rightarrow a-2\times7 \overset{7}{\equiv} b \Rightarrow a-14 \overset{7}{\equiv} b$$

نادرستی سایر گزینه‌ها با استفاده از خواص هم‌نهشتی قابل اثبات است.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۳۳- گزینهٔ «۱» *(سوگند روشنی)*

با توجه به این‌که مجموعهٔ اعداد صحیح در رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به ۱۳ کلاس هم‌نهشتی افراز شده است، پس $m=13$ و در نتیجه داریم:

$$\overline{5a8} \overset{13}{\equiv} 5 \Rightarrow 8+10a+500 \overset{13}{\equiv} 5 \Rightarrow 8+10a+6 \overset{13}{\equiv} 5$$

$$\Rightarrow 10a \overset{13}{\equiv} -9 \Rightarrow 10a \overset{13}{\equiv} -9+39 \overset{13}{\equiv} 30$$

$$\xrightarrow[(10,13)=1]{\div 10} a \overset{13}{\equiv} 3 \xrightarrow{0<a\le9} a=3$$

$$\overline{aa} \overset{13}{\equiv} 33 \overset{13}{\equiv} 7 \Rightarrow \overline{aa} \in [7]_{13}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۸، ۱۹ و ۲۲)

۳۴- گزینهٔ «۳» *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*

ابتدا تمام مقادیر را به سمت چپ رابطهٔ هم‌نهشتی منتقل می کنیم:

$$a^3-2 \overset{m}{\equiv} 2a^2-a \Rightarrow a^3-2a^2+a-2 \overset{m}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow a^2(a-2)+(a-2) \overset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow (a-2)(a^2+1) \overset{m}{\equiv} 0$$

طبق ویژگی ۷ هم‌نهشتی و با توجه به این‌که $(a^2+1\,,\,m)=1$، طرفین رابطهٔ هم‌نهشتی را بر a^2+1 تقسیم می‌کنیم (بدون این‌که پیمانه تغییر کند):

$$a-2\overset{m}{\equiv}0 \Rightarrow m\,|\,a-2$$

درستی سایر گزینه‌ها به ازای $m=7$ و $a=2$ رد می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحهٔ ۲۲)

۳۵- گزینهٔ «۱» *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$105=bq+15 \quad , \quad b>15$$

$$\Rightarrow 90=bq \Rightarrow b\,|\,90 \qquad (1)$$

$$141=bq'+21 \quad , \quad b>21$$

$$\Rightarrow 120=bq' \Rightarrow b\,|\,120 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\,,\,(2)} b\,|\,(90\,,120) \Rightarrow b\,|\,30 \xrightarrow{b>21} b=30$$

پس فقط یک مقدار قابل قبول برای b وجود دارد.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۳۶- گزینهٔ «۳» *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

ابتدا کلاس هم‌نهشتی n را به پیمانهٔ ۱۹ به دست می‌آوریم:

$$11^2=121=6\times19+7 \Rightarrow 11^2\overset{19}{\equiv}7 \xrightarrow{\times 11} 11^3\overset{19}{\equiv}77\overset{19}{\equiv}1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 9} 11^{27}\overset{19}{\equiv}1 \xrightarrow{\times 11^2} 11^{29}\overset{19}{\equiv}11^2\overset{19}{\equiv}7$$

$$\Rightarrow 11^{29}+n\overset{19}{\equiv}7+n \Rightarrow 7+n\overset{19}{\equiv}0 \Rightarrow n\overset{19}{\equiv}-7 \Rightarrow n=19k-7$$

n عددی دو رقمی است، پس داریم:

$$10\le n\le 99 \Rightarrow 10\le 19k-7\le 99 \Rightarrow 17\le 19k\le 106$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 1\le k\le 5$$

پس ۵ عدد طبیعی دو رقمی برای n پیدا می‌شود.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۳۷- گزینهٔ «۴» *(سوگند روشنی)*

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵، یکی از اعداد صفر تا ۴ است، پس داریم:

$$a\overset{5}{\equiv}0 \Rightarrow a^3\overset{5}{\equiv}0 \Rightarrow a^3-3\overset{5}{\equiv}-3\overset{5}{\equiv}2$$

$$a\overset{5}{\equiv}1 \Rightarrow a^3\overset{5}{\equiv}1 \Rightarrow a^3-3\overset{5}{\equiv}-2\overset{5}{\equiv}3$$

$$a\overset{5}{\equiv}2 \Rightarrow a^3\overset{5}{\equiv}8 \Rightarrow a^3-3\overset{5}{\equiv}5\overset{5}{\equiv}0$$

$$a\overset{5}{\equiv}3 \Rightarrow a^3\overset{5}{\equiv}27 \Rightarrow a^3-3\overset{5}{\equiv}24\overset{5}{\equiv}4$$

$$a\overset{5}{\equiv}4 \Rightarrow a^3\overset{5}{\equiv}64 \Rightarrow a^3-3\overset{5}{\equiv}61\overset{5}{\equiv}1$$

بنابراین با توجه به فرض سؤال، تنها حالت $a\overset{5}{\equiv}2$ قابل قبول است. در این صورت داریم:

$$a\overset{5}{\equiv}2 \Rightarrow a=5k+2 \Rightarrow a-13=5k-11$$

k در تقسیم بر ۳، به یکی از سه صورت زیر نوشته می‌شود:

$$k=3t \Rightarrow a-13=15t-11\overset{15}{\equiv}4$$

$$k=3t+1 \Rightarrow a-13=15t-6\overset{15}{\equiv}9$$

$$k = ۳t + ۲ \Rightarrow a - ۱۳ = ۱۵t - ۱ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۴$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای باقی‌مانده‌ها، برابر $۲۷ = ۱۴ + ۹ + ۴$ است.

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۳۸- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا شریف‌خطیبی)*

عدد $۷^{۱۰} \times ۱۱^{۲۰}$ عددی فرد است، پس حاصل‌ضرب سه عدد صحیح a، b و c، عددی فرد شده است و در نتیجه هر یک از مقادیر a، b و c، عددی فرد هستند. می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $۸k + ۱$ $(k \in \mathbb{Z})$ نوشته می‌شود، پس داریم:

$$a^۲ + ۲b^۲ + ۳c^۲ = (۸k + ۱) + ۲(۸k' + ۱) + ۳(۸k'' + ۱)$$

$$= ۸k + ۱۶k' + ۲۴k'' + ۶ = ۸(\underbrace{k + ۲k' + ۳k''}_{q}) + ۶ \Rightarrow r = ۶$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۳۹- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

با توجه به تعریف هم‌نهشتی و کلاس‌های هم‌نهشتی داریم:

$$m \mid ۳a - ۵ \Rightarrow ۳a \overset{m}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۴} ۱۲a \overset{m}{\equiv} ۲۰$$

$$۴a \in [۹]_m \Rightarrow ۴a \overset{m}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\times ۳} ۱۲a \overset{m}{\equiv} ۲۷$$

$$\Rightarrow ۲۷ \overset{m}{\equiv} ۲۰ \Rightarrow m \mid ۲۷ - ۲۰ \Rightarrow m \mid ۷ \xrightarrow{m \neq ۱} m = ۷$$

با فرض $m = ۷$، روابط را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۵ \\ ۴a \overset{۷}{\equiv} ۹ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a \overset{۷}{\equiv} ۴$$

$$a^۳ - ۳a^۲ - ۴a - ۶ \overset{۷}{\equiv} ۴^۳ - ۳ \times ۴^۲ - ۴ \times ۴ - ۶$$

$$\overset{۷}{\equiv} ۱ - (-۱) - ۲ - (-۱) \overset{۷}{\equiv} ۱$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۴۰- **گزینهٔ «۲»** *(احمدرضا فلاح)*

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow ۵r = bq + r \Rightarrow ۴r = bq \qquad (*)$$

$$r < b \Rightarrow ۴r < ۴b \xrightarrow{(*)} bq < ۴b$$

$$\Rightarrow q < ۴ \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} q_{max} = ۳$$

با جای‌گذاری $q = ۳$ در رابطهٔ (۱) داریم:

$$۴r = bq \xrightarrow{q = ۳} ۴r = ۳b \Rightarrow ۴ \mid ۳b$$

$$\Rightarrow ۳b \overset{۴}{\equiv} ۰ \xrightarrow[\div ۳]{(۳,۴) = ۱} b \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۴ \mid b$$

$$\Rightarrow b = ۴k \xrightarrow{b < ۲۰} b = ۴, ۸, ۱۲, ۱۶$$

پس ۴ مقدار برای مقسوم علیه و در نتیجه ۴ مقدار طبیعی برای مقسوم وجود دارد که این مقادیر عبارتند از:

$$\begin{cases} b = ۴ \Rightarrow r = ۳ \Rightarrow a = ۱۵ \\ b = ۸ \Rightarrow r = ۶ \Rightarrow a = ۳۰ \\ b = ۱۲ \Rightarrow r = ۹ \Rightarrow a = ۴۵ \\ b = ۱۶ \Rightarrow r = ۱۲ \Rightarrow a = ۶۰ \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته- صفحه‌های ۱۴، ۱۵ و ۲۲)

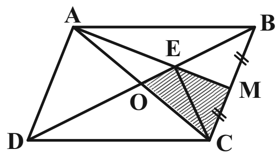
هندسه ۱

۴۱- گزینهٔ «۳» *(مومن عقیلی)*

می‌دانیم اقطار متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، یعنی $OA = OC$.

از طرفی طبق فرض می‌دانیم که نقطهٔ M وسط ضلع BC است، یعنی $MB = MC$.

در نتیجه نقطه E محل همرسی میانه‌ها و مرکز ثقل مثلث ABC است و خواهیم داشت:



$$S_{OEMC} = S_{OEC} + S_{MEC} \xrightarrow{S_{OEC}=S_{MEC}=\frac{1}{6}S_{ABC}}$$

$$S_{OEMC} = \frac{2}{6}S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$$

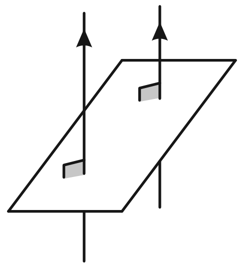
و از طرفی می‌دانیم که $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$، پس:

$$S_{OEMC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \xrightarrow{S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}} S_{OEMC} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴۲- گزینهٔ «۳» *(مومن عقیلی)*

گزینهٔ ۳ همواره نادرست است، زیرا اگر دو خط بر یک صفحه عمود شوند با هم موازی می‌شوند که با فرض متنافر بودن آن‌ها مغایرت دارد. درستی گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ را خودتان بررسی کنید

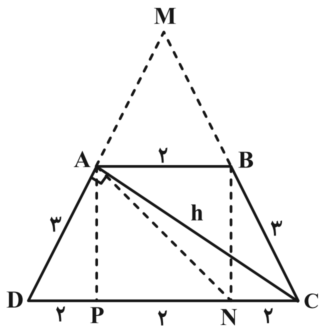


(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۴۳- گزینهٔ «۱» *(نیما مهندس)*

دو ساق BC و AD را از سمت B و A امتداد داده تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. مثلث MCD متساوی‌الساقین است (چرا؟). مجموع فواصل هر نقطه روی قاعدهٔ مثلث MCD از دو ساق، برابر با ارتفاع وارد بر ساق مثلث است. بنابراین مجموع فواصل نقطهٔ N از BC و AD برابر با ارتفاع وارد بر ساق در مثلث MCD است.

در شکل از رأس A نیز بر قاعدهٔ بزرگ عمود کرده و پای عمود را P می‌نامیم. واضح است که: $AB = DP = PN = NC$. با استفاده از تعمیم قضیه تالس داریم:



$$\text{ذوزنقهٔ } ABCD \xrightarrow{AB\|CD} \frac{MA}{MD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA+3} = \frac{2}{6} \Rightarrow MA = \frac{3}{2}$$

همچنین طبق فیثاغورس داریم:

$$BN^2 = BC^2 - CN^2 = 3^2 - 2^2 \Rightarrow BN = \sqrt{5}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(2+6)\times\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5} \quad (*)$$

همچنین از تشابه دو مثلث MAB و MCD داریم:

$$\overset{\triangle}{MAB} \sim \overset{\triangle}{MCD} \Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MCD}} = \left(\frac{MA}{MD}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{MCD}} = \frac{8}{9} \xrightarrow{(*)} S_{MCD} = \frac{9\sqrt{5}}{2}$$

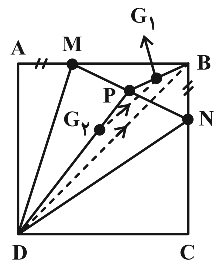
$$S_{MCD} = \frac{h\times MD}{2} \xrightarrow[S_{MCD}=\frac{9\sqrt{5}}{2}]{MD=\frac{9}{2}}$$

$$\frac{9\sqrt{5}}{2} = \frac{h\times\frac{9}{2}}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{5}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۸)

۴۴- **گزینهٔ «۴»** *(مهرداد ملوندی)*

مرکز ثقل مثلث BMN (نقطهٔ $G_۱$) روی میانهٔ BP و مرکز ثقل مثلث DMN (نقطهٔ $G_۲$) روی میانهٔ DP قرار دارد و داریم:



$$\frac{PG_۱}{PB}=\frac{PG_۲}{PD}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}G_۱G_۲ \parallel BD$$

حال در مثلث PBD، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{G_۱G_۲}{BD}=\frac{PG_۱}{PB}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{BD=a\sqrt{۲}}G_۱G_۲=\frac{a\sqrt{۲}}{۳}$$

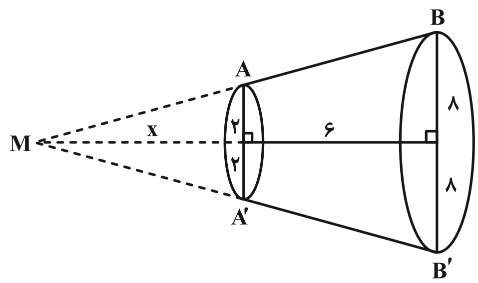
فرض $AM=BN$ اضافی بوده و تأثیری در پاسخ ندارد.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحهٔ ۶۷)

۴۵- **گزینهٔ «۲»** *(فاطمه بزروی)*

روش اول: ساق‌های AB و DC را از سمت A و D امتداد داده تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع بکنند. شکل نهایی حاصل از دوران به‌صورت زیر می‌شود:

در مخروط حاصل طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



$$\text{ذوزنقهٔ } ABB'A' \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow \frac{۴}{۱۶}=\frac{x}{x+۶}\Rightarrow x=۲$$

سپس حجم مخروط بزرگ و کوچک را محاسبه می‌کنیم:

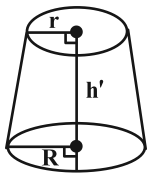
$$V_{\text{مخروط بزرگ}}=\frac{۱}{۳}\pi R^۲H\xrightarrow[H=۸]{R=۸}\frac{۱}{۳}\times\pi\times۶۴\times۸=\frac{۵۱۲\pi}{۳}$$

$$V_{\text{مخروط کوچک}}=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h\xrightarrow[h=۲]{r=۲}\frac{۱}{۳}\times\pi\times۴\times۲=\frac{۸\pi}{۳}$$

حجم شکل موردنظر (مخروط ناقص) از اختلاف حجم مخروط بزرگ و کوچک به‌دست می‌آید:

$$V_{\text{مخروط ناقص}}=\frac{۵۱۲\pi}{۳}-\frac{۸\pi}{۳}=\frac{۵۰۴\pi}{۳}=۱۶۸\pi$$

روش دوم: حجم مخروط ناقص از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



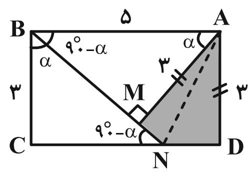
$$V=\frac{\pi h'}{۳}(R^۲+r^۲+Rr)$$

$$\xrightarrow{h'=H-h=۶\ ,\ R=۸\ ,\ r=۲}V=\frac{\pi(۶)}{۳}(۸^۲+۲^۲+۸(۲))$$

$$=۲\pi(۶۴+۴+۱۶)=۱۶۸\pi$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۹۵ و ۹۶)

۴۶- **گزینهٔ «۳»** *(سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)*



دو مثلث ABM و BCN با همدیگر هم‌نهشت (زضز) هستند و داریم:

$$\left.\begin{array}{l}BN=AB=۵\\ BM=CN=\sqrt{۵^۲-۳^۲}=۴\end{array}\right\}\Rightarrow MN=ND=۱$$

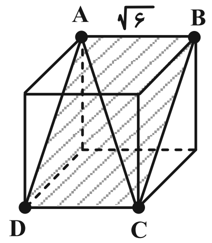
$$S_{AMND}=۲S_{ADN}=۲\times(\frac{۱}{۲}\times۱\times۳)=۳$$

توجه: دو مثلث ADN و AMN هم‌نهشت هستند.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴۷- **گزینهٔ «۲»** *(مهرداد ملوندی)*

مطابق شکل، سطح مقطع مستطیل شکل $ABCD$ (شامل قطر AC و یال AB) مورد نظر است. داریم:



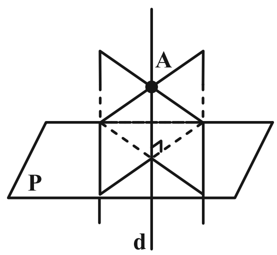
$BC = a\sqrt{2} = \sqrt{6}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ (قطر وجه مکعب)

در نتیجه مساحت این سطح مقطع برابر می‌شود با:

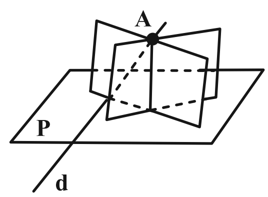
$$S=\sqrt{6}\times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{2}$$

(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

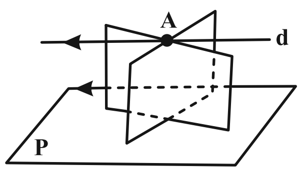
۴۸- **گزینهٔ «۴»** (اسحاق اسفندیار)



گزینهٔ «۱»



گزینهٔ «۲»



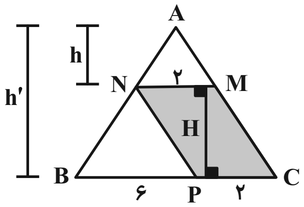
گزینهٔ «۳»

طبق شکل‌های رسم شده، هر سه وضعیت می‌تواند رخ بدهد.

(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۴۹- **گزینهٔ «۲»** (احمدرضا فلاح)

دو مثلث ANM و ABC با یکدیگر متشابه (ز ز) هستند، بنابراین داریم:



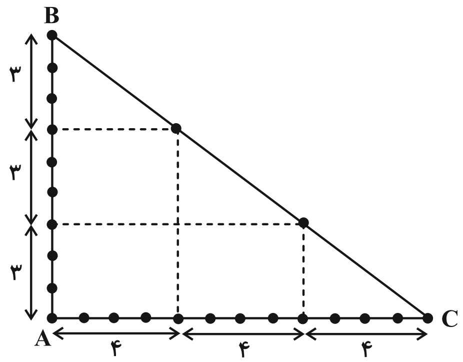
$$\frac{MN}{BC}=\frac{h}{h'}=\frac{1}{4}\Rightarrow h'=4h\Rightarrow H=h'-h=4h-h=3h$$

$$\frac{S_{MNPC}}{S_{ABC}}=\frac{PC\times H}{\frac{1}{2}\times BC\times h'}=\frac{2\times 3h}{\frac{1}{2}\times 8\times 4h}=\frac{3}{8}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۵۰- **گزینهٔ «۲»** (مهرداد ملوندی)

شکل زیر، مثلث شبکه‌ای مورد نظر را نشان می‌دهد و هیچ حالت دیگری که اضلاع قائمهٔ آن، افقی و قائم نباشد، وجود ندارد. (چرا؟)



با توجه به شکل $b = 24$ و طبق فرمول پیک برای این مثلث شبکه‌ای داریم:

$$\begin{cases} S=\frac{b}{2}+i-1=\frac{24}{2}+i-1 \\ S=\frac{12\times 9}{2}=54 \end{cases}$$

$\Rightarrow 54 = 11 + i \Rightarrow i = 43$ (تعداد نقاط درونی)

توجه: خط شامل ضلع BC، شیب $-\frac{3}{4}$ دارد و این بدان معناست که به ازای هر ۴ واحد افقی، ۳ واحد عمودی پایین می‌رویم تا به نقطه‌ای با مختصات شبکه‌ای برسیم.

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱)

هندسه ۲

۵۱- گزینهٔ «۱» (فاطمه برزویی)

طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow a^2 = (\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}-1)^2 - 2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow a^2 = (3+2\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2}) - 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

سپس با توجه به قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sin\hat{B}}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{B} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}-\sqrt{15}}{10}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۰ تا ۶۶)

۵۲- گزینهٔ «۲» (امیرحسین ابومحبوب)

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow 20 = 12 - 2AB\times AC\times\cos\hat{A} \Rightarrow 2AB\times AC\times\cos\hat{A} = -8$$

$$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{-4}{AB\times AC} \quad (1)$$

طبق رابطهٔ سینوسی مساحت مثلث داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A} = 4 \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{8}{AB\times AC} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \tan\hat{A} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$\frac{1}{\cos^2\hat{A}} = 1 + \tan^2\hat{A} = 5 \Rightarrow \cos^2\hat{A} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin^2\hat{A} = \frac{4}{5}$$

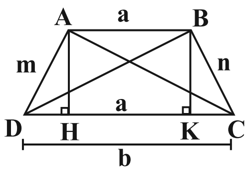
$$\xrightarrow[\sin\hat{A}>0]{0<\hat{A}<180^\circ} \sin\hat{A} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{BC}{\sin\hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{2\sqrt{5}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 2R \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۰ تا ۶۷)

۵۳- گزینهٔ «۴» (هومن عقیلی)



طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ADC داریم:

$$AC^2 = m^2 + b^2 - 2mb\cos\hat{D} \quad (1)$$

همچنین طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث BDC داریم:

$$BD^2 = n^2 + b^2 - 2nb\cos\hat{C} \quad (2)$$

از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$AC^2 + BD^2 = m^2 + n^2 + 2b^2 - 2b(\underbrace{m\cos\hat{D}}_{DH} + \underbrace{n\cos\hat{C}}_{KC})$$

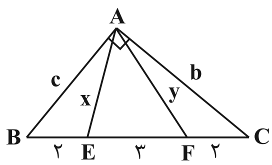
$$\xrightarrow{DH+KC=b-a} AC^2 + BD^2 = m^2 + n^2 + 2b^2 - 2b(b-a)$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = m^2 + n^2 + 2ab$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۵۴- گزینهٔ «۲» (هومن عقیلی)

طبق قضیهٔ استوارت در مثلث ABF داریم:



$$3c^2 + 2y^2 = 5(6 + x^2) \Rightarrow 3c^2 + 2y^2 = 30 + 5x^2 \quad (1)$$

همچنین طبق قضیهٔ استوارت در مثلث AEC داریم:

$$3b^2 + 2x^2 = 5(6 + y^2) \Rightarrow 3b^2 + 2x^2 = 30 + 5y^2 (2)$$

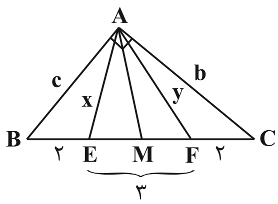
از جمع کردن تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\xrightarrow{(1)+(2)} 3c^2+3b^2+2y^2+2x^2=60+5x^2+5y^2$$

$$\xrightarrow{b^2+c^2=7^2} 3\times 7^2=60+3x^2+3y^2$$

$$\Rightarrow 147-60=3(x^2+y^2)\Rightarrow 29=x^2+y^2=AE^2+AF^2$$

راه‌حل دوم: در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. چون $\hat{A}=90^\circ$، $AM=\frac{BC}{2}$. با نوشتن قضیهٔ میانه‌ها در مثلث AEF خواهیم داشت:



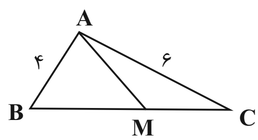
$$AE^2+AF^2=\frac{EF^2}{2}+2AM^2\xrightarrow[EF=3]{AM=\frac{BC}{2}}$$

$$AE^2+AF^2=\frac{9}{2}+2\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{9}{2}+\frac{49}{2}=\frac{58}{2}=29$$

$$\Rightarrow AE^2+AF^2=29$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۶۷)

۵۵- **گزینهٔ «۲»** (فرزانه خاکپاش)



اگر $\hat{B}+\hat{C}=60^\circ$ باشد، پس $\hat{A}=120^\circ$ است. بنابراین ابتدا به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها، طول ضلع BC را پیدا می‌کنیم.

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow BC^2=4^2+6^2-2\times4\times6\left(-\frac{1}{2}\right)=76$$

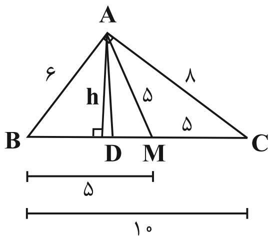
ضلع BC (رو به رو به زاویهٔ 120°) بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، پس میانهٔ وارد بر آن کوتاه‌ترین میانهٔ مثلث خواهد بود. حال طبق قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}\Rightarrow 4^2+6^2=2AM^2+\frac{76}{2}$$

$$\Rightarrow 2AM^2=14\Rightarrow AM^2=7\Rightarrow AM=\sqrt{7}$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۶۷)

۵۶- **گزینهٔ «۳»** (احمدرضا فلاح)



اضلاع مثلث اعداد فیثاغورسی هستند، پس مثلث قائم‌الزاویه است.

در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس: $AM=BM=CM=5$. همچنین طبق قضیه نیمسازها داریم:

$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}BD=3k\\CD=4k\end{cases}$$

$$\Rightarrow BC=7k\Rightarrow 10=7k\Rightarrow k=\frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow BD=\frac{10}{7}\times3=\frac{30}{7}$$

$$DM=BM-BD\Rightarrow DM=5-\frac{30}{7}=\frac{5}{7}$$

سپس با استفاده از رابطه مساحت در مثلث ABC، ارتفاع وارد بر وتر BC را می‌یابیم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}BC\times h\Rightarrow 6\times8=10\times h\Rightarrow h=\frac{24}{5}$$

در نتیجه داریم:

$$S_{ADM}=\frac{h\times DM}{2}=\frac{\frac{24}{5}\times\frac{5}{7}}{2}=\frac{\frac{24}{7}}{2}=\frac{12}{7}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۵۷- **گزینهٔ «۴»** (سیدمحمدرضا حسینی‌فرد)

طبق رابطهٔ طول نیمساز داخلی، حاصل $BD.CD$ را به‌دست می‌آوریم:

$$AD^{۲} = AB.AC - BD.DC \Rightarrow ۳^{۲} = ۳\times۴ - BD.DC$$

$$\Rightarrow BD.CD = ۳$$

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$AD.DM = BD.DC \Rightarrow ۳\times DM = ۳ \Rightarrow DM = ۱$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰)

۵۸- **گزینهٔ «۱»** (امیرحسین ابومحبوب)

فرض کنید $a = ۱۲$، $b = ۱۷$ و $c = ۲۵$ باشد. طبق قضیهٔ هرون در این مثلث داریم:

$$P = \frac{۱۲+۱۷+۲۵}{۲} = ۲۷$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۲۷\times۱۵\times۱۰\times۲}$$

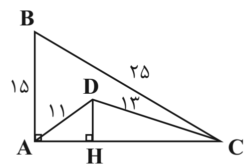
$$= \sqrt{۳^{۳}\times(۳\times۵)\times(۲\times۵)\times۲} = \sqrt{۲^{۲}\times۳^{۴}\times۵^{۲}} = ۲\times۳^{۲}\times۵ = ۹۰$$

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث برابر است با:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{۹۰}{۲۷} = \frac{۱۰}{۳}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۵۹- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین ابومحبوب)



ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع AC را محاسبه می‌کنیم.

$$۵AB = ۳BC = ۷۵ \Rightarrow \begin{cases} AB = ۱۵ \\ BC = ۲۵ \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : AC^{۲} = BC^{۲} - AB^{۲} = ۲۵^{۲} - ۱۵^{۲} = ۴۰۰ \Rightarrow AC = ۲۰$$

مساحت مثلث ADC را با داشتن طول اضلاع آن و به کمک قضیهٔ هرون پیدا می‌کنیم:

$$P_{ADC} = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲} = ۲۲$$

$$S_{ADC} = \sqrt{۲۲(۲۲-۱۱)(۲۲-۱۳)(۲۲-۲۰)}$$

$$= \sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲} = \sqrt{۲۲^{۲}\times۳^{۲}} = ۲۲\times۳ = ۶۶$$

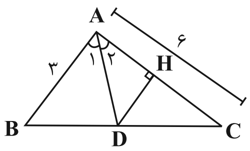
طول ارتفاع DH برابر است با:

$$S_{ADC} = \frac{۱}{۲}DH\times AC \Rightarrow ۶۶ = \frac{۱}{۲}DH\times۲۰ \Rightarrow DH = ۶/۶$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۶۰- **گزینهٔ «۱»** (فرزانه خاکپاش)

ابتدا طول نیمساز AD را برحسب $\cos\frac{\hat{A}}{۲}$ می‌نویسیم:



$$AD = \frac{bc}{b+c}\times۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD داریم:

$$\sin\hat{A}_{۲} = \frac{DH}{AD} \Rightarrow DH = AD\times\sin\hat{A}_{۲}$$

$$\xrightarrow{\hat{A}_{۲}=\frac{۱}{۲}\hat{A}} DH = AD.\sin\frac{\hat{A}}{۲}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{bc}{b+c}\times\underbrace{۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}\times\sin\frac{\hat{A}}{۲}}_{\sin\hat{A}} = \frac{۳\times۶}{۳+۶}\times\frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۷۴)

فیزیک ۳

۶۱- گزینهٔ «۴» (پوریا علاقه‌مند)

با استفاده از معادلهٔ داده شده و مقایسهٔ آن با معادلهٔ مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 4t + 16 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = 4\frac{m}{s} \\ \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4\frac{m}{s^2} \\ x_0 = 16\,m \end{cases}$$

با داشتن سرعت اولیه و ثانویه و نیز شتاب متحرک، با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی، جابه‌جایی متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[a=4\frac{m}{s^2}]{v_2=32\frac{m}{s}\,,\,v_1=v_0=4\frac{m}{s}} 32^2 - 4^2 = 2\times 4\times \Delta x$$

$$\Rightarrow 8\Delta x = (32+4)(32-4) \Rightarrow \Delta x = 126\,m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۶۲- گزینهٔ «۱» (زهره آقامحمدی)

با توجه به این‌که معادلهٔ داده شده یک معادلهٔ درجهٔ ۲ است، حرکت با شتاب ثابت صورت می‌گیرد. ابتدا با مقایسهٔ معادله با معادلهٔ حرکت با شتاب ثابت، شتاب، سرعت اولیه و مکان اولیهٔ متحرک را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ x = -2t^2 + 8t + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a = -2 \Rightarrow a = -4\frac{m}{s^2} \\ v_0 = 8\frac{m}{s} \\ x_0 = 12\,m \end{cases}$$

چون سرعت اولیه در خلاف جهت شتاب است، پس حرکت متحرک در ابتدا کندشونده است و در نتیجه متحرک تغییر جهت می‌دهد. بنابراین لحظهٔ تغییر جهت حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0=8\frac{m}{s}]{a=-4\frac{m}{s^2}} v = -4t + 8$$

$$\xrightarrow{v=0} t = 2s \quad \text{لحظهٔ تغییر جهت حرکت}$$

پس برای محاسبهٔ مسافت طی شده در بازهٔ 1s تا 5s، جابه‌جایی‌ها را در بازهٔ 1s تا 2s و 2s تا 5s محاسبه کرده و اندازهٔ آن‌ها را جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_{1s} = -2\times 1 + 8\times 1 + 12 = 18m \\ x_{2s} = -2\times 4 + 8\times 2 + 12 = 20m \\ x_{5s} = -2\times 25 + 8\times 5 + 12 = 2m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = x_{2s} - x_{1s} = 20 - 18 = 2m \\ \Delta x_2 = x_{5s} - x_{2s} = 2 - 20 = -18m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell_{(\text{1s تا 5s})} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 2 + 18 = 20m \\ \ell_{(\text{صفر تا 1s})} = |x_1 - x_0| = |18 - 12| = 6m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell_{(\text{1s تا 5s})}}{\ell_{(\text{صفر تا 1s})}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۳- گزینهٔ «۴» (علی برزگر)

شتاب حرکت با توجه به نمودار همواره مقداری ثابت و منفی است. با توجه به این موضوع، حالات زیر ممکن است رخ دهد:

الف) اگر متحرک با سرعت اولیه مثبت شروع به حرکت کند، آن‌گاه حرکت آن ابتدا کندشونده و پس از توقف و تغییر جهت تندشونده خواهد بود.

ب) اگر متحرک بدون سرعت اولیه شروع به حرکت کند، حرکت آن تندشونده خواهد بود.

پ) اگر متحرک با سرعت اولیه منفی شروع به حرکت کند، در این صورت حرکت آن تندشونده خواهد بود.

لذا نوع حرکت متحرک به سرعت اولیهٔ آن بستگی دارد.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۴- گزینهٔ «۴» (امیراحمد میرسعید)

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ به دست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_{av(\text{0 تا 4s})} = v_{av(\text{0 تا 0/5s})} + 14\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{v_4 + v_0}{2} - \frac{v_{0/5} + v_0}{2} = 14$$

$$\xrightarrow{v_0=10\frac{m}{s}} \frac{v_4+10}{2}-\frac{v_{0/5}+10}{2}=14$$

$$\Rightarrow v_4+10-v_{0/5}-10=28 \Rightarrow v_4-v_{0/5}=28\frac{m}{s}$$

در گام بعدی از رابطهٔ شتاب متوسط استفاده می‌کنیم، دقت کنید چون شتاب ثابت است، شتاب متوسط برابر با شتاب متحرک در هر لحظه است:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_4-v_{0/5}}{4-0/5}=\frac{28}{3/5}=8\frac{m}{s^2}$$

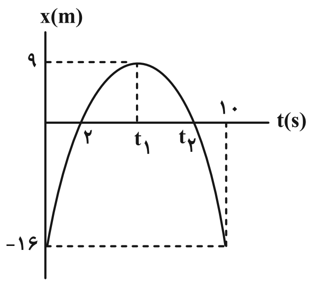
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۵- گزینهٔ «۴» *(حسین الهی)*

ابتدا با توجه به تقارن سهمی، لحظات t_1 و t_2 را می‌یابیم، دقت کنید چون نمودار مکان- زمان به صورت سهمی است، حرکت جسم با شتاب ثابت است.

$$t_1=\frac{0+10}{2}=5\,s$$

$$t_1=\frac{2+t_2}{2}\xrightarrow{t_1=5s}5=\frac{2+t_2}{2}\Rightarrow t_2=8\,s$$



اکنون با استفاده از بازهٔ زمانی $t=0s$ تا $t=5s$ و جابه‌جایی متحرک در آن، سرعت اولیهٔ متحرک را می‌یابیم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t\xrightarrow[\Delta t=5s\,,\,v_2=0\,,\,v_1=v_0]{\Delta x=x_2-x_1=9-(-16)=25m}25=\frac{v_0+0}{2}\times 5$$

$$\Rightarrow v_0=10\frac{m}{s}$$

در این قسمت، شتاب حرکت و به دنبال آن معادلهٔ سرعت- زمان متحرک را پیدا می‌کنیم:

$$v=at+v_0\xrightarrow[v_0=10\frac{m}{s}]{t=5s\,,\,v=0}0=5\times a+10\Rightarrow a=-2\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow v=-2t+10$$

در آخر با استفاده از معادلهٔ به دست آمده داریم:

$$\begin{cases} t_1=0s\Rightarrow v_1=10\frac{m}{s} \\ t_2=8s\Rightarrow v_2=-2\times 8+10=-6\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{10+(-6)}{2}=2\frac{m}{s}$$

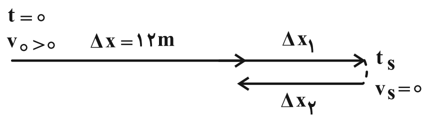
(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۶- گزینهٔ «۲» *(علیرضا جباری)*

ابتدا جابه‌جایی متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=6s]{v_{av}=2\frac{m}{s}}2=\frac{\Delta x}{6}\Rightarrow \Delta x=12\,m$$

در حرکت بر روی خط راست، وقتی در یک بازهٔ زمانی معین، مسافت طی شده (ℓ) و جابه‌جایی متحرک (Δx) با هم برابر نیستند، یعنی متحرک در یک لحظه مانند t_s متوقف شده و جهت حرکت آن تغییر کرده است. با توجه به این‌که در لحظهٔ $t=0$ جهت حرکت در سوی مثبت محور x بوده است، داریم:



$$\Delta x_1=\frac{\ell-\Delta x}{2}=\frac{13-12}{2}=0/5\,m$$

$$\Delta x_2=-\Delta x_1=-0/5\,m$$

با استفاده از رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه می‌توان نوشت:

$$\Delta x+\Delta x_1=-\frac{1}{2}at_s^2+v_st\xrightarrow[v_s=0]{\Delta x=12m\,,\,\Delta x_1=0/5m}$$

$$12/5=-\frac{1}{2}at_s^2 \qquad (A)$$

همچنین با توجه به معادلهٔ جابه‌جایی داریم:

$$\Delta x_2=\frac{1}{2}a(t-t_s)^2+v_s(t-t_s)\xrightarrow[t=6s\,,\,v_s=0]{\Delta x_2=-0/5m}$$

$$-0/5=\frac{1}{2}a(6-t_s)^2 \qquad (B)$$

روابط A و B را بر هم تقسیم می‌کنیم تا لحظهٔ توقف را به دست آوریم:

$$\frac{۱۲/۵}{-۰/۵}=\frac{-\frac{۱}{۲}at_s^۲}{\frac{۱}{۲}a(۶-t_s)^۲}\Rightarrow ۲۵=\frac{t_s^۲}{(۶-t_s)^۲}$$

$$\Rightarrow ۵=\frac{t_s}{۶-t_s}\Rightarrow t_s=۵s$$

اکنون می‌توانیم شتاب حرکت را حساب کنیم:

$$۱۲/۵=-\frac{۱}{۲}at_s^۲\xrightarrow{t_s=۵s}۱۲/۵=-\frac{۱}{۲}a(۵^۲)\Rightarrow a=-۱\frac{m}{s^۲}$$

همچنین سرعت اولیه متحرک را نیز پیدا می‌کنیم:

$$v_s=at_s+v_۰\xrightarrow[t_s=۵s]{v_s=۰\ ,\ a=-۱\frac{m}{s^۲}}۰=-۱\times۵+v_۰$$

$$\Rightarrow v_۰=۵\frac{m}{s}$$

در پایان تندی متحرک را در لحظهٔ $t=۳s$ حساب می‌کنیم:

$$v=at+v_۰\xrightarrow[v_۰=۵\frac{m}{s}]{a=-۱\frac{m}{s^۲}\ ,\ t=۳s}v=-۱\times۳+۵=۲\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow s=|v|=۲\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۷- **گزینهٔ «۲»** (علیرضا جباری)

ابتدا شتاب هر یک از دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a_A=\frac{\Delta v_A}{\Delta t}=\frac{۴-(-۱۲)}{۴-۰}=\frac{۱۶}{۴}=۴\frac{m}{s^۲}$$

$$a_B=\frac{\Delta v_B}{\Delta t}=\frac{۴-۰}{۴-۰}=۱\frac{m}{s^۲}$$

از آنجا که نمودار سرعت- زمان هر دو متحرک به صورت خط راست است، حرکت هر دو با شتاب ثابت است. معادلهٔ مکان- زمان هر یک از آن دو را می‌نویسیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\begin{cases}\xrightarrow{v_{۰A}=-۱۲\frac{m}{s}}x_A=\frac{۱}{۲}\times۴t^۲+(-۱۲)t+۳\\ \Rightarrow x_A=۲t^۲-۱۲t+۳\\ \xrightarrow{v_{۰B}=۰}x_B=\frac{۱}{۲}(۱)t^۲+۰+۳\\ \Rightarrow x_B=\frac{۱}{۲}t^۲+۳\end{cases}$$

اکنون می‌توانیم فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر را در لحظهٔ $t=۶s$ پیدا کنیم:

$$|x_B-x_A|=|\frac{۱}{۲}t^۲+۳-(۲t^۲-۱۲t+۳)|=|-\frac{۳}{۲}t^۲+۱۲t|$$

$$\xrightarrow{t=۶s}|x_B-x_A|=|-\frac{۳}{۲}(۶)^۲+۱۲\times۶|$$

$$=|-۵۴+۷۲|=۱۸m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۸- **گزینهٔ «۳»** (محمدکاظم منشاری)

مسافتی را که متحرک از لحظهٔ ترمز گرفتن تا توقف کامل می‌پیماید، با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی می‌یابیم:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲a\Delta x\xrightarrow[v_۲=۰\ ,\ a=-۱۰\frac{m}{s^۲}]{v_۱=۱۰۸\frac{km}{h}=۳۰\frac{m}{s}}۰-(۳۰)^۲=۲(-۱۰)\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x=۴۵m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۶۹- **گزینهٔ «۴»** (زهره آقامحمدی)

ابتدا معادلهٔ مکان- زمان دو متحرک را می‌یابیم. توجه کنید که حرکت متحرک A با سرعت ثابت و حرکت متحرک B با شتاب ثابت است: (زیرا نمودار سرعت- زمان B به صورت خط راست شیبدار و نمودار A به صورت خط افقی است.)

$$\begin{cases}a_B=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰-(-۲۰)}{۵}=۸\frac{m}{s^۲}\\ v_{۰B}=-۲۰\frac{m}{s}\\ x_{۰B}=۰\end{cases}\Rightarrow x_B=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\Rightarrow x_B=۴t^۲-۲۰t$$

$$\begin{cases}v_A=۲۰\frac{m}{s}\\ x_{۰A}=۰\end{cases}\Rightarrow x_A=vt+x_۰\Rightarrow x_A=۲۰t$$

در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، $x_A = x_B$ است:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲۰t = ۴t^۲ - ۲۰t \Rightarrow ۴۰t = ۴t^۲ \Rightarrow t = ۱۰s$$

توجه کنید چون متحرک B تغییر جهت داده است، مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر نیست، بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی آن را تا لحظهٔ تغییر جهت و پس از آن محاسبه می‌کنیم. ابتدا لحظهٔ تغییر جهت حرکت را به دست می‌آوریم:

$$v_B = at + v_۰ = ۸t - ۲۰ \xrightarrow{v=۰} ۸t - ۲۰ = ۰ \Rightarrow t = ۲/۵s$$

$$۰ \le t \le ۲/۵s \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۸ \times (۲/۵)^۲ - ۲۰ \times ۲/۵ = -۲۵m$$

$$۲/۵s < t \le ۱۰s \Rightarrow \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times (۱۰ - ۲/۵)^۲ = ۲۲۵m$$

توجه کنید که سرعت اولیهٔ بازهٔ $۲/۵s$ تا $۱۰s$ برابر صفر است. (چون سرعت در لحظهٔ $۲/۵s$ برابر صفر است.) بنابراین مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = ۲۵۰m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۲۵۰}{۱۰} = ۲۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۷۰- **گزینهٔ «۳»** *(مهران اسماعیلی)*

۳ ثانیهٔ دوم حرکت شتابدار متحرک مربوط به بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳s$ تا $t_۲ = ۶s$ است. چون جابه‌جایی متحرک در این بازه برابر صفر است، می‌توان نتیجه گرفت مکان- زمان متحرک در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ یکسان است. با توجه به معادلهٔ مکان- زمان متحرک داریم: $x_۱ = x_۲$

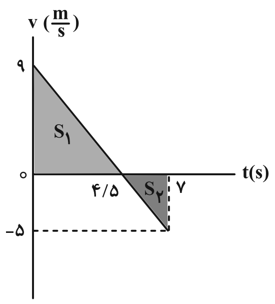
$$\frac{۱}{۲}at_۱^۲ + v_۰t_۱ + x_۰ = \frac{۱}{۲}at_۲^۲ + v_۰t_۲ + x_۰ \xrightarrow[v_۰=۹\frac{m}{s}]{t_۱=۳s\ ,\ t_۲=۶s}$$

$$\frac{۱}{۲}a \times ۳^۲ + ۹ \times ۳ + x_۰ = \frac{۱}{۲}a \times ۶^۲ + ۹ \times ۶ + x_۰$$

$$\frac{۹}{۲}a + ۲۷ = ۱۸a + ۵۴ \Rightarrow \frac{۲۷}{۲}a = -۲۷ \Rightarrow a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

برای محاسبهٔ مسافتی که متحرک در مدت ۷ ثانیه طی می‌کند، کافی است نمودار سرعت- زمان متحرک را رسم کرده و اندازهٔ سطح زیر نمودار را در مدت ۷ ثانیه محاسبه کنیم که برای این منظور ابتدا باید معادلهٔ سرعت- زمان متحرک را بنویسیم:

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v_۰=۹\frac{m}{s}]{a=-۲\frac{m}{s^۲}} v = -۲t + ۹$$



$$v = ۰ \Rightarrow ۰ = -۲t + ۹ \Rightarrow t = ۴/۵s$$

$$t = ۷s \Rightarrow v = -۲ \times ۷ + ۹ = -۵\frac{m}{s}$$

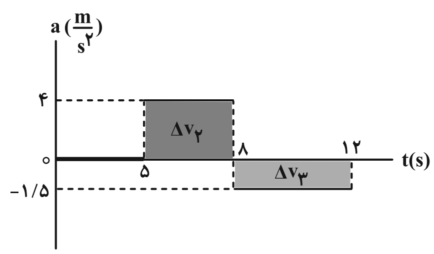
$$\ell = |S_۱| + |S_۲| = \frac{۹ \times ۴/۵}{۲} + \frac{۲/۵ \times ۵}{۲} = \frac{۸۱}{۴} + \frac{۲۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \ell = ۲۶/۵m$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۷۱- **گزینهٔ «۴»** *(علیرضا جباری)*

در نمودار شتاب- زمان، مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازهٔ زمانی است. برای سطحی که بالای محور زمان است، $\Delta v > ۰$ و برای سطحی که زیر محور زمان است، $\Delta v < ۰$ در نظر گرفته می‌شود.

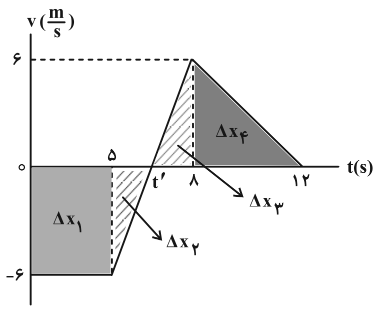


$$\Delta v_۱ = ۰$$

$$\Delta v_۲ = ۴(۸ - ۵) = ۱۲\frac{m}{s}$$

$$\Delta v_{۳} = -۱/۵(۱۲-۸) = -۶\frac{m}{s}$$

بر این اساس و با توجه به این‌که $v_{۰} = -۶\frac{m}{s}$ است، نمودار سرعت- زمان متحرک را در ۱۲ ثانیهٔ اول حرکت رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار داریم:



$$t' = \frac{۵+۸}{۲} = ۶/۵\,s$$

مساحت سطح بین نمودار سرعت- زمان و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازه است.

$$\Delta x_{۱} = -۶(۵-۰) = -۳۰m$$

$$\Delta x_{۲} = \frac{(۶/۵-۵)(-۶)}{۲} = -۴/۵m$$

$$\Delta x_{۳} = \frac{(۸-۶/۵)۶}{۲} = ۴/۵m$$

$$\Delta x_{۴} = \frac{(۱۲-۸)۶}{۲} = ۱۲m$$

در پایان، جابه‌جایی متحرک در ۱۲ ثانیهٔ اول و سرعت متوسط آن را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = \Delta x_{۱} + \Delta x_{۲} + \Delta x_{۳} + \Delta x_{۴}$$

$$= -۳۰ - ۴/۵ + ۴/۵ + ۱۲ = -۱۸m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۱۸}{۱۲-۰} = -۱/۵\frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = (-۱/۵\frac{m}{s})\vec{i}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

-۷۲ **گزینهٔ «۳»** (مجتبی نکوئیان)

ابتدا با استفاده از رابطهٔ سرعت- جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متحرک را در مکان $x = ۶m$ به دست می‌آوریم:

$$v_{۱}^{۲} - v_{۰}^{۲} = ۲a_{۱}\Delta x_{۱} \xrightarrow[\Delta x_{۱}=۶m\ ,\ v_{۰}=۴\frac{m}{s}]{a_{۱}=۲\frac{m}{s^{۲}}}$$

$$v_{۱}^{۲} - ۱۶ = ۲(۲)(۶) \xrightarrow{v_{۱}>۰} v_{۱} = \sqrt{۴۰}\frac{m}{s}$$

سپس سرعت متحرک را در مکان $x = ۱۰m$ به دست می‌آوریم:

$$v_{۲}^{۲} - v_{۱}^{۲} = ۲a_{۲}\Delta x_{۲} \xrightarrow[a_{۲}=-۴\frac{m}{s^{۲}}\ ,\ \Delta x_{۲}=۴m]{v_{۱}=\sqrt{۴۰}\frac{m}{s}}$$

$$v_{۲}^{۲} - ۴۰ = ۲(-۴)(۴) \xrightarrow{v_{۲}>۰} v_{۲} = \sqrt{۸}\frac{m}{s}$$

و در نهایت، مکان تغییر جهت حرکت متحرک (x) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_{۳}^{۲} - v_{۲}^{۲} = ۲a_{۳}\Delta x_{۳} \xrightarrow[a_{۳}=-۱\frac{m}{s^{۲}}\ ,\ v_{۲}=\sqrt{۸}\frac{m}{s}]{v_{۳}=۰}$$

$$۰ - ۸ = ۲(-۱)(x-۱۰) \Rightarrow x = ۱۴m$$

دقت کنید در مکان‌های $x = ۶m$ و $x = ۱۰m$، با توجه به نمودار، متحرک در حال حرکت در جهت محور x است. به همین دلیل فقط مقادیر مثبت سرعت را پذیرفتیم.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

-۷۳ **گزینهٔ «۱»** (مسعود خندانی)

در سقوط آزاد که نوعی حرکت شتابدار با شتاب ثابت g است، شتاب متوسط همواره برابر با g است.

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

-۷۴ **گزینهٔ «۱»** (حسین الهی)

ابتدا لحظه‌ای را که سنگ با سطح آب رودخانه برخورد می‌کند، مشخص می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} \Rightarrow -۱۰ = -۵t^{۲} \Rightarrow t^{۲} = ۲ \Rightarrow t = \sqrt{۲} \simeq ۱/۴ = \frac{۷}{۵}s$$

برای محاسبهٔ زمان رسیدن صدای برخورد تا شخص داریم:

$$\Delta y = v \times \Delta t \Rightarrow ۱۰ = ۳۰۰ \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{۱۰}{۳۰۰} = \frac{۱}{۳۰}s$$

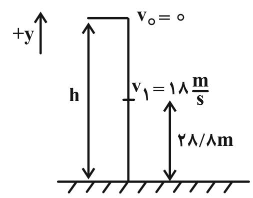
بنابراین زمان خواسته شده برابر است با:

$$\Rightarrow \Delta t_{کل} = \frac{۷}{۵} + \frac{۱}{۳۰} = \frac{۴۲+۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۴۳}{۳۰}s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۷۵- گزینهٔ «۱» (امیراحمد میرسعید)

با توجه به چشم‌پوشی از مقاومت هوا، حرکت متحرک از نوع سقوط آزاد است و اندازهٔ شتاب آن برابر با g است. رابطهٔ سرعت - جابه‌جایی را نوشته و سرعت سنگ هنگام برخورد به زمین را محاسبه می‌کنیم:



$$v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta y$$

$$v_2^2 - 324 = -2\times(+10)\times(-28/8) \Rightarrow v_2 = -30\frac{m}{s}$$

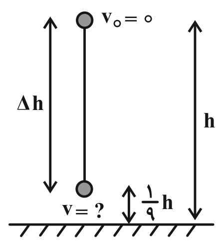
در گام بعدی برای محاسبهٔ زمان کل حرکت، از رابطهٔ $v = -gt$ استفاده می‌کنیم:

$$v_2 = -10\times t \Rightarrow -30 = -10t \Rightarrow t = 3s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۷۶- گزینهٔ «۴» (سیاوش فارسی)

با صرف‌نظر از مقاومت هوا، می‌توان حرکت جسم را به صورت سقوط آزاد در نظر گرفت. با فرض این‌که جهت مثبت محور رو به بالا باشد، داریم:



معادلهٔ سرعت - جابه‌جایی در سقوط آزاد: $v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y$

$$\xrightarrow{v_0=0\ ,\ \Delta y=-\frac{8}{9}h} v^2 = -2g\times -\frac{8}{9}h \Rightarrow v^2 = \frac{16}{9}gh$$

چون جهت محور را بالا در نظر گرفتیم و جسم رو به پایین حرکت می‌کند، $v < 0$ است:

$$v = -\frac{4}{3}\sqrt{gh} \Rightarrow s = |v| = \frac{4}{3}\sqrt{gh}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۷۷- گزینهٔ «۴» (زهره آقامحمدی)

فرض می‌کنیم جهت مثبت محور رو به بالا باشد، از آنجا که در سقوط آزاد تغییر جهت نداریم، در هر بازهٔ زمانی تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط برابر است. چون جسم رو به پایین حرکت می‌کند، داریم:

$$|v_{av}| = 25\frac{m}{s} \Rightarrow v_{av} = -25\frac{m}{s}$$

اگر سرعت جسم در لحظهٔ برخورد را v و در ۳ ثانیهٔ قبل از آن را v_0 در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta v=v-v_0\ ,\ \Delta t=3-0=3s]{a=-g=-10\frac{m}{s^2}} -10 = \frac{v-v_0}{3}$$

$$\Rightarrow v_0 = v + 30\frac{m}{s}$$

در آخر داریم:

$$s_{av} = 25\frac{m}{s} \xrightarrow[v_{av}<0]{\text{تغییر جهت نداریم}} v_{av} = -25\frac{m}{s}$$

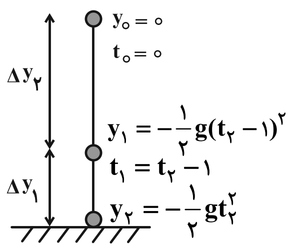
$$v_{av} = \frac{v+v_0}{2} \xrightarrow[v_{av}=-25\frac{m}{s}]{v_0=v+30} -25 = \frac{v+v+30}{2}$$

$$\Rightarrow v = -40\frac{m}{s} \Rightarrow s = |v| = 40\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۷۸- گزینهٔ «۱» (بهزاد آزادفر)

جهت مثبت محور را رو به بالا و محل رها شدن گلوله را مبدأ مکان در نظر می‌گیریم. با توجه به این نکات، معادلهٔ مکان - زمان گلوله را نوشته و جابه‌جایی آن را در بازه‌های زمانی خواسته شده به دست می‌آوریم:



$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t_1=t_2-1} y_1 = -\frac{1}{2}g(t_2-1)^2 \\ \xrightarrow{t=t_2} y_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_۲-۱ \text{ تا } ۰: \Delta y_۱ = y_۱ - y_۰ = -\frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲ - ۰ \\ = -\frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲ \qquad (۱) \\ t_۲ \text{ تا } t_۲-۱: \Delta y_۲ = y_۲ - y_۱ = -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ - (-\frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲) \\ = -\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ + \frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲ \qquad (۲) \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y_۲}{\Delta y_۱} = \frac{۹}{۱۶} \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{-\frac{۱}{۲}gt_۲^۲ + \frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲}{-\frac{۱}{۲}g(t_۲-۱)^۲} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow ۱۶t_۲^۲ - ۱۶(t_۲-۱)^۲ = ۹(t_۲-۱)^۲ \Rightarrow ۱۶t_۲^۲ = ۲۵(t_۲-۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴t_۲ = ۵t_۲ - ۵ \Rightarrow t_۲ = ۵s$$

در آخر، با استفاده از معادلهٔ سرعت - زمان، سرعت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v = -gt \xrightarrow[t=۵s]{g=۹/۸\frac{N}{kg}} v = -۴۹\frac{m}{s} \Rightarrow s = |v| = ۴۹\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۷۹- **گزینهٔ «۳»** *(علیرضا جباری)*

اگر زمان سقوط گلولهٔ A در این سوال را با t نشان دهیم، زمان سقوط گلولهٔ B برابر با $t-۱/۵s$ خواهد بود. بر این اساس، نقطهٔ رها شدن گلوله‌ها را به عنوان مبدأ مکان در نظر گرفته و معادلهٔ مکان هر یک از آن‌ها را می‌نویسیم: $(y_۰ = ۰)$

$$y_A = -\frac{۱}{۲}gt_A^۲ \xrightarrow[g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{t_A=t} y_A = -۵t^۲$$

$$y_B = -\frac{۱}{۲}gt_B^۲ \xrightarrow[g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{t_B=t-۱/۵s} y_B = -۵(t-۱/۵)^۲$$

اکنون فاصلهٔ دو گلوله از یکدیگر را برابر با $۴۱/۲۵m$ قرار می‌دهیم و t را به دست می‌آوریم:

$$y_B - y_A = ۴۱/۲۵m$$

$$\Rightarrow -۵(t-۱/۵)^۲ - (-۵t^۲) = ۴۱/۲۵$$

$$\Rightarrow -۵(t^۲ - ۳t + ۲/۲۵) + ۵t^۲ = ۴۱/۲۵$$

$$\Rightarrow +۱۵t - ۱۱/۲۵ = ۴۱/۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۵t = ۵۲/۵ \Rightarrow t = \frac{۵۲/۵}{۱۵} = ۳/۵s$$

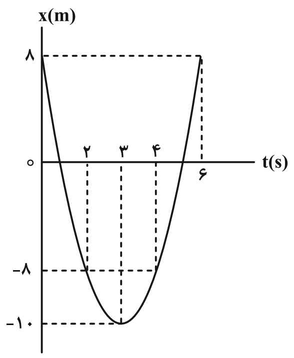
بنابراین داریم:

$$\Rightarrow t_A = ۳/۵s \;,\; t_B = t_A - ۱/۵ = ۳/۵ - ۱/۵ = ۲s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۸۰- **گزینهٔ «۳»** *(سراسری ریاضی - اردیبهشت ۱۴۰۳)*

با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، معادلهٔ سرعت - زمان را به دست می‌آوریم و لحظهٔ تغییر جهت را می‌یابیم:



$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x = ۲t^۲ - ۱۲t + ۸ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[v_۰=-۱۲\frac{m}{s}]{a=۴\frac{m}{s^۲}} v = ۴t - ۱۲ \xrightarrow{v=۰} t = ۳s \quad \text{(لحظهٔ تغییر جهت)}$$

$$\Rightarrow x = ۲\times۹ - ۱۲\times۳ + ۸ = -۱۰m$$

$$x = -۸ \Rightarrow ۲t^۲ - ۱۲t + ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲s \\ t = ۴s \end{cases}$$

طبق نمودار مکان - زمان، در بازهٔ زمانی صفر تا $۲s$ و $۴s$ تا $۶s$ فاصلهٔ متحرک از مبدأ محور کمتر یا مساوی ۸ متر می‌باشد.

$$\Delta t_{\text{کل}} = ۲s + (۶-۴)s = ۴s$$

(فیزیک ۳- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

فیزیک ۱

۸۱- گزینهٔ «۴» (علیرضا جباری)

رابطهٔ انرژی جنبشی برای این جسم را در هر دو حالت می‌نویسیم و آن‌ها را از هم کم می‌کنیم تا $v_۱$ به دست آید:

$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow K_۲-K_۱=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\xrightarrow{K_۲=K_۱+۱۵} K_۱+۱۵-K_۱=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)$$

$$\xrightarrow[m=۵۰۰g=\frac{۱}{۲}kg]{v_۲=v_۱+۳} ۱۵=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}[(v_۱+۳)^۲-v_۱^۲]$$

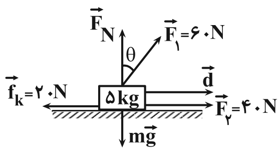
$$\Rightarrow ۶۰=v_۱^۲+۶v_۱+۹-v_۱^۲ \Rightarrow ۶۰=۶v_۱+۹$$

$$\Rightarrow ۵۱=۶v_۱ \Rightarrow v_۱=\frac{۵۱}{۶}=۸/۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۸۲- گزینهٔ «۲» (امیراحمد میرسعید)

مجموع کار همهٔ نیروهای وارد بر جسم برابر با ۶۸۰ ژول است، پس می‌توان نوشت:



$$W_{کل}=W_{F_۱}+W_{F_۲}+W_{f_k}+W_{mg}+W_{F_N}\xrightarrow[W_{F_N}=۰]{W_{mg}=۰}$$

$$۶۸۰=F_۱\times d\times\cos(۹۰-\theta)+F_۲\times d\times\cos۰+f_k\times d\times\cos۱۸۰^\circ$$

$$۶۸۰=۶۰\times۱۰\times\cos(۹۰-\theta)+۴۰\times۱۰\times۱+۲۰\times۱۰\times(-۱)$$

$$۴۸۰=۶۰۰\cos(۹۰^\circ-\theta)\Rightarrow\cos(۹۰^\circ-\theta)=۰/۸$$

$$۹۰^\circ-\theta=۳۷^\circ\Rightarrow\theta=۵۳^\circ$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۸۳- گزینهٔ «۴» (محمدکاظم منشاری)

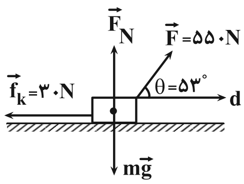
نیروی عمودی سطح، در هر لحظه بر جابه‌جایی جسم عمود است. بنابراین $\theta=۹۰^\circ$ بوده و خواهیم داشت:

$$W=Fd\cos\theta\xrightarrow{\theta=۹۰^\circ}W=Fd\cos۹۰^\circ=Fd\times۰=۰$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۸۴- گزینهٔ «۳» (سیاوش فارسی)

طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی، کار کل انجام شده بر جسم، برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است. همچنین کار کل، برابر با مجموع کار تک‌تک نیروها است. حال داریم:



$$\Delta K=W_t=W_{f_k}+W_F+W_{F_N}+W_{mg}$$

$$\xrightarrow{W_{F_N}=W_{mg}=۰}\Rightarrow\Delta K=W_{f_k}+W_F$$

$$\xrightarrow{W=Fd\cos\theta}\Delta K=f_kd\cos\alpha+Fd\cos\theta$$

$$\xrightarrow[\alpha=۱۸۰^\circ\ ,\ \theta=۵۳^\circ]{f_k=۳۰N\ ,\ F=۵۵۰N\ ,\ d=۲۰m}$$

$$\Delta K=۳۰(۲۰)(\cos۱۸۰^\circ)+۵۵۰(۲۰)(\cos۵۳^\circ)\Rightarrow\Delta K=۶۰۰۰J$$

حال با داشتن تغییر انرژی جنبشی، سرعت ثانویهٔ جسم را به دست می‌آوریم:

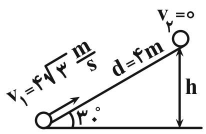
$$K=\frac{۱}{۲}mv^۲\Rightarrow\Delta K=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)$$

$$\xrightarrow[\Delta K=۶۰۰۰J]{m=۳۰kg\ ,\ v_۱=۰}۶۰۰۰=\frac{۱}{۲}\times۳۰\times v_۲^۲\Rightarrow v_۲=۲۰\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۶۳)

۸۵- گزینهٔ «۱» (زهره آقامحمدی)

ابتدا ارتفاع گلوله در لحظهٔ توقف را محاسبه می‌کنیم:



$$\sin۳۰^\circ=\frac{h}{d}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{h}{۴}\Rightarrow h=۲m$$

با استفاده از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی، داریم:

$$W_t=\cancel{K_۲}^{۰}-K_۱\Rightarrow W_{mg}+W_{f_k}=-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

چون جسم بالا می‌رود کار نیروی وزن بر روی جسم برابر $W_{mg}=-mgh$ است. از طرفی نیروی اصطکاک خلاف جهت جابه‌جایی است. بنابراین داریم:

$$-mgh+f_kd\,\overset{-۱}{\cancel{\cos۱۸۰^\circ}}=-\frac{۱}{۲}mv_۱^۲\Rightarrow mgh+f_kd=\frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\xrightarrow[h=۲m\ ,\ d=۴m\ ,\ g=۱۰\frac{N}{kg}]{m=۱kg\ ,\ v_۱=۴\sqrt{۳}\frac{m}{s}}$$

$$۱\times۱۰\times۲+f_k\times۴=\frac{۱}{۲}\times۱\times۴۸\Rightarrow f_k=۱N$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۸)

۸۶- **گزینهٔ «۱»** (پوریا علاقه‌مند)

می‌دانیم در نبود نیروهای اتلافی، انرژی مکانیکی جسم پایسته است. یعنی انرژی مکانیکی در سطح زمین برابر با انرژی مکانیکی جسم در نصف ارتفاع اوج است. بنابراین انرژی مکانیکی جسم در سطح زمین را حساب می‌کنیم:

$$E_{\text{سطح زمین}} = K + U \xrightarrow{h=0 \Rightarrow U=0} E_{\text{سطح زمین}} = K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{\text{سطح زمین}} = \frac{1}{2}\times 8\times(20)^2 = 4\times 400 = 1600\,J$$

$$\Rightarrow E_{\text{نصف ارتفاع اوج}} = E_{\text{سطح زمین}} = 1600\,J$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۸۷- **گزینهٔ «۱»** (ممد مقدم)

انرژی جنبشی اولیه جسم برابر است با:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \xrightarrow{v_1 = 8\frac{m}{s}} K_1 = \frac{1}{2}m\times 8^2 = 32m$$

بعد از آن‌که جسم روی سطح بالا رفت و متوقف شد، فقط دارای انرژی پتانسیل گرانشی می‌باشد. در این حالت داریم:

$$h_{max} = \ell\sin 53^\circ \Rightarrow h_{max} = 3\times \sin 53^\circ = 2/4\,m$$

$$E_2 = U_2 = mgh_2 \Rightarrow U_2 = m\times 10\times 2/4 = 24m$$

انرژی تلف شده برابر اختلاف انرژی مکانیکی اولیه و ثانویه است.

$$\text{اتلاف انرژی}\; E_2 - E_1 = U_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \text{اتلاف انرژی} = 24m - 32m = -8m$$

درصد اتلاف انرژی نیز از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$\text{درصد اتلاف انرژی} = \frac{-8m}{32m}\times 100 = -25\%$$

که علامت منفی نشان‌دهندهٔ هدررفت انرژی است.

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۸۸- **گزینهٔ «۲»** (حسام نادری)

می‌دانیم بازده یک سامانه به صورت نسبت کار خروجی به کار ورودی تعریف می‌شود، پس داریم: (η نماد بازده است.)

$$\eta_1 = \frac{W_1}{W'}\times 100 = 60 \Rightarrow W_1 = 0/6\,W'$$

$$\left.\begin{array}{l}\eta_3 = \dfrac{W_3}{W_2}\times 100 = 20 \Rightarrow W_3 = 0/2W_2 \\ \eta_{\text{کل}} = \dfrac{W_3}{W'}\times 100 = 10 \Rightarrow W_3 = 0/1W'\end{array}\right\} \Rightarrow W_2 = \frac{1}{2}W'$$

$$\Rightarrow \eta_2 = \frac{W_2}{W_1}\times 100 = \frac{0/5\,W'}{0/6\,W'}\times 100 \simeq 83/3\%$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۷۵ و ۷۶)

۸۹- **گزینهٔ «۲»** (حسام نادری)

به بررسی تمام موارد می‌پردازیم:

الف) درست؛ اگر کار برایند نیروهای وارد بر جسمی صفر باشد، می‌توان گفت زاویهٔ بین بردار غیر صفر برایند نیروها و بردار جابه‌جایی 90° بوده است که $\cos 90^\circ = 0$ می‌باشد. بنابراین این گزاره الزاماً درست است.

ب) نادرست؛ اگر کار کل وارد بر یک جسم صفر باشد، انرژی جنبشی آغازین و پایانی جسم یکسان بوده است و این بدین معناست که تندی آغازین و پایانی جسم نیز یکسان است. توجه شود که سرعت کمیت برداری است و می‌تواند تغییر جهت دهد اما اندازهٔ آن ثابت بماند.

پ) درست؛ اگر انرژی جنبشی جسمی در ابتدا و انتهای مسیر حرکتش یکسان باشد، کار برایند نیروهای وارد بر آن در این مسیر صفر است:

$$W_{F_{net}} = \Delta K = K_2 - K_1 = 0$$

ت) درست؛ نیروی عمودی سطح در هر لحظه بر جابه‌جایی جسم عمود است، بنابراین $\theta = 90^\circ$ بوده و داریم:

$$W = F_N d\cos\theta \xrightarrow{\theta=90^\circ} W = F_N d\cos 90^\circ = 0$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

۹۰- **گزینهٔ «۲»** (حسام نادری)

ابتدا توان مفید موتور آسانسور که ناشی از کار آن برای غلبه بر نیروی گرانش است را حساب می‌کنیم:

$$W_t = \Delta K \xrightarrow{\text{تندی ثابت است}} W_{mg} + W_{\text{موتور}} = 0$$

$$\Rightarrow W_{\text{موتور}} = -W_{mg} = -(-mgh) = mgh$$

$$(\text{توان مفید})\; P_{av} = \frac{W_{\text{موتور}}}{t} = \frac{mgh}{t} \xrightarrow[h=24m\;,\;t=20s]{m=460+4\times 60=700kg}$$

$$P_{av} = \frac{700\times 10\times 24}{20} = 8400\,W$$

$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{مصرفی}}} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{8400}{P_{\text{مصرفی}}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{مصرفی}} = 10500\,W = 10/5\,kW$$

(فیزیک ۱- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۸ و ۷۳ تا ۷۷)

فیزیک ۲

۹۱- گزینهٔ «۱» *(علیرضا جباری)*

اختلاف پتانسیل دو سر باتری برابر است با:

$$V = RI \xrightarrow{I=\frac{\varepsilon}{R+r}} V = \frac{R\varepsilon}{R+r}$$

حال رابطهٔ $V=\frac{R\varepsilon}{R+r}$ را در دو حالت می‌نویسیم و آن‌ها را بر یکدیگر تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\frac{R_۲\varepsilon}{R_۲+r}}{\frac{R_۱\varepsilon}{R_۱+r}} = \frac{R_۲(R_۱+r)}{R_۱(R_۲+r)}$$

$$\xrightarrow[R_۲=R_۱+۳\Omega]{V_۱=۱۵V\ ,\ V_۲=۱۶V\ ,\ r=۱\Omega} \frac{۱۶}{۱۵}=\frac{(R_۱+۳)(R_۱+۱)}{R_۱(R_۱+۳+۱)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۱۵}=\frac{R_۱^۲+۴R_۱+۳}{R_۱^۲+۴R_۱}$$

$$\Rightarrow ۱۶R_۱^۲+۶۴R_۱=۱۵R_۱^۲+۶۰R_۱+۴۵$$

$$\Rightarrow R_۱^۲+۴R_۱-۴۵=۰ \Rightarrow (R_۱-۵)(R_۱+۹)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_۱=۵\Omega & \text{ق ق} \\ R_۲=-۹\Omega & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

اکنون می‌توانیم با معلوم بودن $R_۱$، نیروی محرکهٔ باتری (ε) را به دست آوریم:

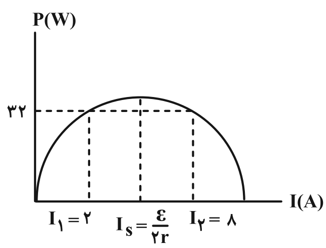
$$V_۱=\frac{R_۱\varepsilon}{R_۱+r} \xrightarrow[R_۱=۵\Omega\ ,\ r=۱\Omega]{V_۱=۱۵V}$$

$$۱۵=\frac{۵\varepsilon}{۵+۱} \Rightarrow ۵\varepsilon=۹۰ \Rightarrow \varepsilon=۱۸V$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۹۲- گزینهٔ «۱» *(بهزاد آزادفر)*

با توجه به رابطهٔ توان خروجی باتری که درجهٔ دوم است و با استفاده از روابط رأس سهمی و قضیهٔ تقارن در سهمی‌ها، داریم:



$$P=\varepsilon I-rI^۲ \Rightarrow I_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{\varepsilon}{۲r}$$

با توجه به تقارن سهمی: $I_S=\frac{I_۱+I_۲}{۲} \Rightarrow I_S=\frac{۱۰}{۲}=۵A$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{۲r}=۵ \Rightarrow \varepsilon=۱۰r$$

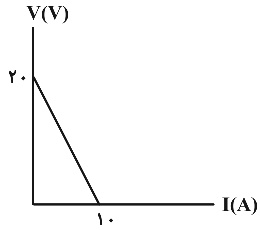
از طرفی به ازای جریان $۲A$، توان مفید برابر با $۳۲W$ است:

$$P=\varepsilon I-rI^۲ \Rightarrow ۳۲=\varepsilon\times۲-r\times(۲)^۲$$

$$\Rightarrow ۳۲=۲۰r-۴r=۱۶r \Rightarrow r=۲\Omega$$

$$\varepsilon=۱۰r \xrightarrow{r=۲\Omega} \varepsilon=۲۰V$$

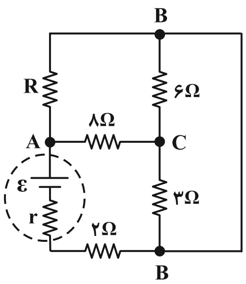
$$V=\varepsilon-Ir \Rightarrow V=۲۰-۲I$$

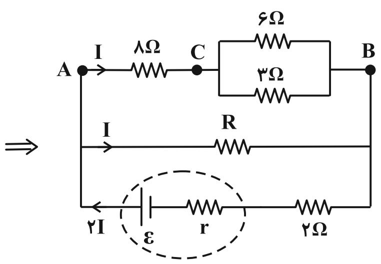


(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۹۳- گزینهٔ «۴» *(زهره آقامحمدی)*

ابتدا با نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل، مدار را ساده می‌کنیم:





چون جریان عبوری از مقاومت‌های ۸Ω و R یکسان است، پس مقاومت معادل سه مقاومت ۶Ω، ۳Ω و ۸Ω برابر با R است. بنابراین داریم:

(مقاومت‌های ۶Ω و ۳Ω موازی و معادل آن‌ها با ۸Ω سری است.)

$$R = 8 + \frac{6\times 3}{6+3} = 8 + \frac{18}{9} = 10\Omega$$

از طرف طبق قاعدهٔ انشعاب، جریان عبوری از مقاومت 2Ω و باتری، برابر $2I$ است. بنابراین نسبت توان مصرفی مقاومت R به توان مصرفی مقاومت ۲ اهمی برابر است با:

$$P = RI^2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1}\times\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 = \frac{10}{2}\times\left(\frac{I}{2I}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۷)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(پوریا علاقه‌مند)*

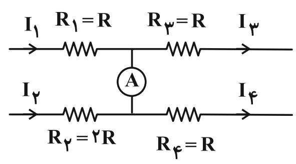
ابتدا مقاومت کل مدار را به دست می‌آوریم. مقاومت‌های R_1 و R_2 موازی و مقاومت‌های R_3 و R_4 نیز موازی‌اند. همچنین مقاومت معادل R_1 و R_2 با مقاومت معادل R_3 و R_4 به صورت سری است:

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = \frac{2R\times R}{2R+R}+\frac{R\times R}{R+R} = \frac{7}{6}R$$

اکنون می‌توان جریان کل مدار را به دست آورد:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}+r} \xrightarrow{r=0\,,\,R_{eq}=\frac{7}{6}R} I = \frac{\varepsilon}{\frac{7}{6}R} = \frac{6\varepsilon}{7R}$$

حال تمام جریان‌های I_1 تا I_4 را برحسب $I = \frac{6\varepsilon}{7R}$ به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} I_1+I_2 = \frac{6\varepsilon}{7R} \\ RI_1 = 2RI_2\end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{4\varepsilon}{7R} \ , \ I_2 = \frac{2\varepsilon}{7R}$$

$$\begin{cases} I_3+I_4 = \frac{6\varepsilon}{7R} \\ RI_3 = RI_4\end{cases} \Rightarrow I_3 = \frac{3\varepsilon}{7R} \ , \ I_4 = \frac{3\varepsilon}{7R}$$

با توجه به عددهای به دست آمده برای جریان‌ها، باید مقداری جریان از سیم حاوی آمپرسنج به امتداد جریان I_4 اضافه شود تا جریان‌های I_3 و I_4 برابر شوند. اگر این مقدار جریان را I' در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$I_3 = I_4 \Rightarrow I_1 - I' = I_2 + I' \xrightarrow{I_1=\frac{4\varepsilon}{7R}\,,\,I_2=\frac{2\varepsilon}{7R}}$$

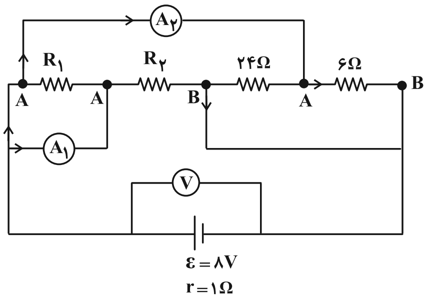
$$\frac{4\varepsilon}{7R} - I' = \frac{2\varepsilon}{7R}+I' \Rightarrow 2I' = \frac{2\varepsilon}{7R} \Rightarrow I' = \frac{\varepsilon}{7R}$$

پس آمپرسنج A، جریان $I' = \frac{\varepsilon}{7R}$ را نشان می‌دهد.

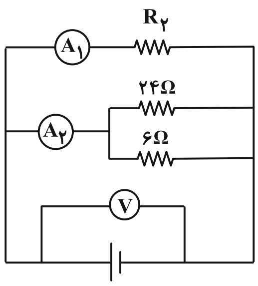
(فیزیک ۲- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

۹۵- **گزینهٔ «۴»** *(سیدمحمدعلی موسوی)*

با توجه به شکل، هر سه مقاومت 6Ω، 24Ω و R_2 بین دو نقطهٔ B و A قرار دارند. بنابراین با هم موازی هستند و R_1 به واسطه قرار گرفتن بین دو نقطه یکسان A، اتصال کوتاه می‌شود.



ساده شدهٔ مدار و توزیع جریان آن به شکل زیر است:



طبق قاعدهٔ انشعاب تمام جریان عبوری از مدار برابر با مجموع جریان عبوری از آمپرسنج ۱ و ۲ است: $I = 0/25 + 1/75 = 2A$

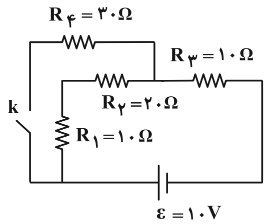
ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد، بنابراین از رابطهٔ $V=\varepsilon - Ir$ داریم:

$$V = \varepsilon - Ir = 8-(2)(1) = 6V$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۴ و ۷۰ تا ۷۸)

۹۶- **گزینهٔ «۴»** *(علی برزگر)*

در حالت اول که کلید k باز است، مقاومت R_4 از مدار خارج است و باقی مقاومت‌ها به صورت متوالی به یکدیگر بسته شده‌اند. لذا داریم:

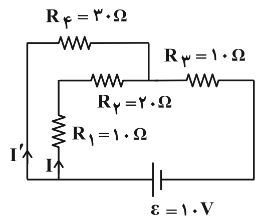


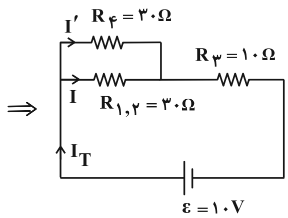
$$R_T = R_1+R_2+R_3 = ۱۰+۲۰+۱۰ = ۴۰\Omega$$

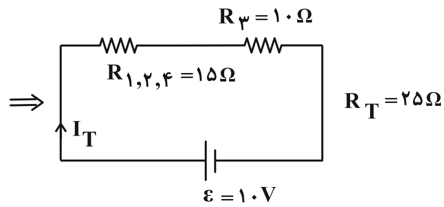
$$I_1=I_2=I_3=I_T=\frac{V}{R_T}=\frac{۱۰}{۴۰}=\frac{۱}{۴}A$$

$$\xrightarrow[R_2=۲۰\Omega]{I_2=\frac{۱}{۴}A} P_2 = R_2I_2^2 = ۲۰\times(\frac{۱}{۴})^2=\frac{۲۰}{۱۶}=\frac{۵}{۴}W$$

بعد از بسته شدن کلید k، ابتدا باید مقاومت معادل مدار را به دست آوریم:







حال جریان کل و جریان مقاومت R_2 را به دست می‌آوریم:

$$I_T=\frac{V}{R_T}\xrightarrow[R_T=۲۵\Omega]{V=\varepsilon=۱۰V} I_T=\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{۲}{۵}A$$

$$\xrightarrow[I_T=I+I']{R_4=R_{1,2}} I=I' \Rightarrow I_T=۲I=\frac{۲}{۵}A\Rightarrow I=\frac{۱}{۵}A$$

$$\Rightarrow P_2'=R_2I^2=۲۰\times(\frac{۱}{۵})^2=\frac{۲۰}{۲۵}=\frac{۴}{۵}W$$

بنابراین تغییر توان مقاومت R_2 برابر است با:

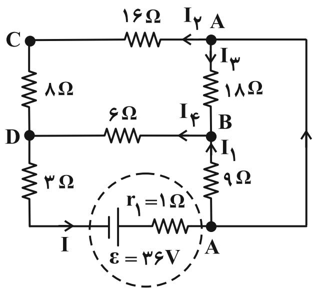
$$\Rightarrow P_2'-P_2=\frac{۴}{۵}-\frac{۵}{۴}=\frac{۱۶-۲۵}{۲۰}=-\frac{۹}{۲۰}W=-۰/۴۵W$$

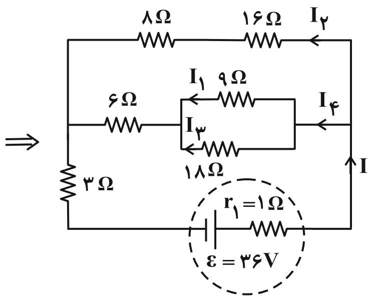
بنابراین توان مصرفی مقاومت R_2، ۰/۴۵ وات کاهش می‌یابد.

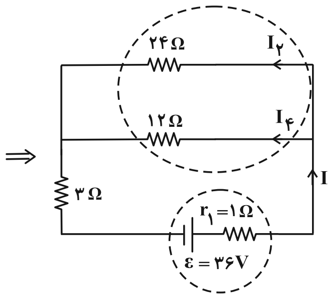
(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۸)

۹۷- **گزینهٔ «۳»** *(مجتبی نکوئیان)*

ابتدا مدار را به شکل ساده‌تری رسم می‌کنیم تا متوالی یا موازی بودن مقاومت‌های مدار را تشخیص دهیم:







حال جریان کل مدار را به دست می‌آوریم:

$$R_{eq}=۱۱\Omega \Rightarrow I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\Rightarrow I=\frac{۳۶}{۱۱+۱}=۳A$$

وقتی دو مقاومت به‌طور موازی به یکدیگر وصل شوند، نسبت شدت جریان آن‌ها برابر نسبت وارون مقاومت آن‌ها است. پس:

$$\begin{cases}\dfrac{I_4}{I_2}=\dfrac{24}{12}=2 \\ I=I_2+I_4=3A\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} I_2=1A \\ I_4=2A\end{matrix}$$

سهم هر کدام از مقاومت‌های 9Ω و 18Ω را از جریان $2A$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\dfrac{I_1}{I_3}=\dfrac{18}{9}=2 \\ I_4=I_1+I_3=2A\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} I_1=\dfrac{4}{3}A \\ I_3=\dfrac{2}{3}A\end{matrix}$$

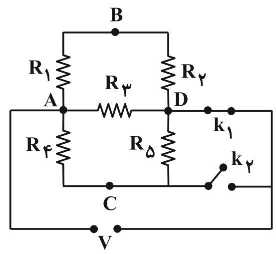
و در نهایت جریان I' را با توجه به قاعدهٔ انشعاب به دست می‌آوریم:

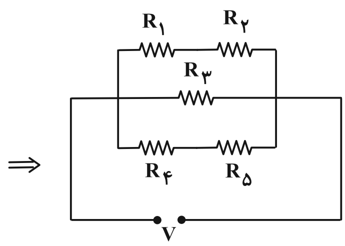
$$I=I_1+I' \Rightarrow 3=\frac{4}{3}+I \Rightarrow I'=\frac{5}{3}A$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

۹۸- گزینهٔ «۱» *(محمدکاظم منشاری)*

ابتدا مدار در حالت اول را ساده کرده و مقاومت معادل آن را به دست می‌آوریم:





با توجه به مدار ساده، مقاومت معادل برابر است:

$$\frac{1}{R_{eq_1}}=\frac{1}{R_{1,2}}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_{4,5}}$$

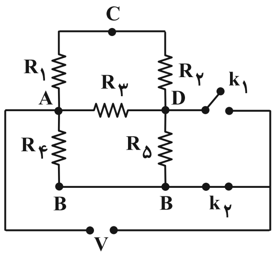
$$\xrightarrow[R_3=2\Omega\ ,\ R_{4,5}=R_4+R_5=4\Omega]{R_{1,2}=R_1+R_2=4\Omega}\frac{1}{R_{eq_1}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

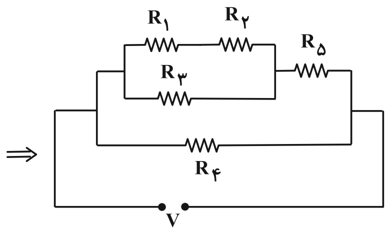
$$\Rightarrow R_{eq_1}=1\Omega$$

طبق قانون پایستگی انرژی، مجموع توان مصرفی تمام مقاومت‌ها با توان مصرفی مقاومت معادل آن‌ها برابر است:

$$P_1=\frac{V^2}{R_{eq_1}}\xrightarrow{R_{eq_1}=1\Omega}P_1=V^2$$

در حالت دوم نیز مانند حالت اول داریم:





در این حالت برای به دست آوردن مقاومت معادل، ابتدا مقاومت معادل شاخه بالا را به دست می‌آوریم:

$$R_{1,2,3,5}=\frac{(R_1+R_2)(R_3)}{R_1+R_2+R_3}+R_5=\frac{(2+2)(2)}{6}+2=\frac{10}{3}\Omega$$

و در نهایت:

$$R_{eq_2}=\frac{R_{1,2,3,5}\times R_4}{R_{1,2,3,5}+R_4}=\frac{\frac{10}{3}\times 2}{\frac{10}{3}+2}=\frac{\frac{20}{3}}{\frac{16}{3}}=\frac{5}{4}\Omega$$

$$P_2=\frac{V^2}{R_{eq_2}}\xrightarrow{R_{eq_2}=\frac{5}{4}\Omega}P_2=\frac{4}{5}V^2$$

حال داریم:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{V^2}{\frac{4}{5}V^2}=\frac{5}{4}$$

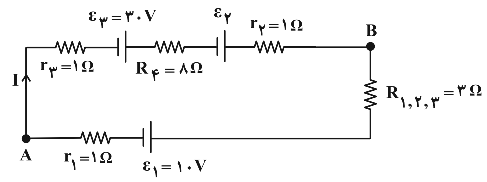
هنگامی که هر دو کلید باز باشند، هیچ جریانی از مدار عبور نمی‌کند. بنابراین توان مصرفی هر یک از مقاومت‌ها صفر بوده و مجموع آن‌ها نیز صفر است. در آخر می‌توان نوشت:

$$\frac{5}{4}-0=\frac{5}{4}$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۸)

۹۹- گزینهٔ «۱» (مسعود قنداني)

از رابطهٔ $V_B - V_A = 18V$ نتیجه می‌شود $V_B > V_A$ و به دنبال آن جریان الکتریکی در مدار ساعتگرد است. ابتدا برای به دست آوردن $I_{\text{کل}}$ و ε_2، مدار را ساده کرده و به جای مقاومت R_1، R_2 و R_3، معادل آن‌ها را قرار می‌دهیم:



$$\frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \xrightarrow[R_3=6\Omega]{R_1=12\Omega,\ R_2=12\Omega} R_{1,2,3}=3\Omega$$

در حالت اول، به صورت پادساعتگرد از A تا B می‌رویم تا $I_{\text{کل}}$ به دست آید:

$$V_A + Ir_1 + \varepsilon_1 + IR_{1,2,3} = V_B \xrightarrow[\varepsilon_1=10V,\ V_B-V_A=18V]{r_1=1\Omega,\ R_{1,2,3}=3\Omega}$$

$$4I+10=18 \Rightarrow I=2A$$

بار دیگر، به صورت ساعتگرد از A به B می‌رویم تا ε_2 به دست آید:

$$V_A - r_3 I + \varepsilon_3 - R_4 I + \varepsilon_2 - r_2 I = V_B$$

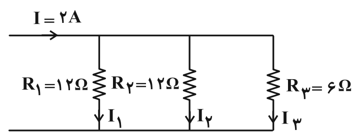
$$\xrightarrow[r_3=1\Omega,\ r_2=1\Omega,\ R_4=8\Omega]{\varepsilon_3=30V,\ I=2A,\ V_B-V_A=18V}$$

$$30+\varepsilon_2-2-16-2=18 \Rightarrow \varepsilon_2=8V$$

چون باتری ε_2 در جهت جریان قرار دارد و آن را تأمین می‌کند، توان آن از رابطهٔ $P=\varepsilon I - rI^2$ به دست می‌آید:

$$P=\varepsilon I - rI^2 \xrightarrow[\varepsilon_2=8V]{I=2A,\ r=1\Omega} P=2(8)-4(1)=12W$$

اکنون جریان I_3 را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} I_1+I_2+I_3=I=2A & (1) \\ R_1I_1=R_3I_3 \xrightarrow[R_1=12\Omega]{R_3=6\Omega} I_1=\frac{1}{2}I_3 & (2) \\ R_2I_2=R_3I_3 \xrightarrow[R_2=12\Omega]{R_3=6\Omega} I_2=\frac{1}{2}I_3 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} 2I_3=2A \Rightarrow I_3=1A$$

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۷۸)

۱۰۰- گزینهٔ «۳» (حسام نادری)

ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از لامپ‌ها را قبل و بعد از بستن کلید k محاسبه می‌کنیم. (توجه کنید که دو مقاومت (لامپ) B و C با یکدیگر موازیند و معادلشان با لامپ A به صورت سری متصل شده است.)

$$\text{قبل از بستن کلید } k \Rightarrow \begin{cases} R_{B,C}=\frac{R}{2} \\ R_A=R \end{cases} \xrightarrow{V=RI,\ I_A=I_{B,C}} V_A=2V_{B,C}$$

$$V_{\text{کل}}=V_A+V_{B,C} \xrightarrow{V_{\text{کل}}=\varepsilon} \begin{cases} V_A=\frac{2\varepsilon}{3} \\ V_{B,C}=\frac{\varepsilon}{3} \xrightarrow{\text{موازی } B \text{ و } C} \\ V_B=V_C=\frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

$$\text{بعد از بستن کلید } k \Rightarrow$$

$$\text{لامپ‌های } B \text{ و } C \text{ اتصال کوتاه می‌شوند} \Rightarrow V_B=V_C=0$$

$$V_{\text{کل}}=V_A+V_{B,C} \xrightarrow[V_{B,C}=0]{V_{\text{کل}}=\varepsilon} V_A=\varepsilon$$

حال درصد تغییر پتانسیل الکتریکی هر یک لامپ‌ها را در این دو حالت محاسبه می‌کنیم:

$$\text{لامپ } B: \frac{\Delta V_B}{V_{1B}}\times 100=\frac{0-\frac{\varepsilon}{3}}{\frac{\varepsilon}{3}}\times 100=-100\%$$

$$\text{لامپ } C: \frac{\Delta V_C}{V_{1C}}\times 100=\frac{0-\frac{\varepsilon}{3}}{\frac{\varepsilon}{3}}\times 100=-100\%$$

$$\text{لامپ } A: \frac{\Delta V_A}{V_{1A}}\times 100=\frac{\varepsilon-\frac{2}{3}\varepsilon}{\frac{2}{3}\varepsilon}\times 100=+50\%$$

با توجه به اعداد به دست آمده، موارد (پ) و (ت) درست هستند.

(فیزیک ۲- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۸)

شیمی ۳

۱۰۱- گزینهٔ «۲» (حمید ذبحی)

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) رسانایی الکتریکی محلول‌های الکترولیت به غلظت اولیه الکترولیت نیز بستگی دارد. همچنین می‌دانیم که HCl اسید قوی و HF اسیدی ضعیف می‌باشد ولی میزان یون تفکیک شده HCl و HF وابسته به غلظت اولیه آن‌ها است.

۳) برای مثال رسانایی الکتریکی محلول یک مولار NaCl و Na_2SO_4 در دمای یکسان با هم برابر نیست.

۴) در ساختار NaCl(s)، یون‌ها آزادی حرکت ندارند.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۶ تا ۱۸)

۱۰۲- گزینهٔ «۴» (سعید تیزرو)

با توجه به مقادیر ثابت یونش در جدول صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی هیدروکلریک اسید قوی‌تر از نیتریک اسید است. در شرایط یکسان هر چه یک اسید قوی‌تر باشد، قطعاً غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن بیشتر خواهد بود.

بررسی برخی گزینه‌ها:

فرمول کربوکسیلیک اسیدها با R سیر شده به صورت $C_nH_{2n}O_2$ می‌باشد و نسبت تعداد کربن به هیدروژن در آن‌ها همواره برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۴)

۱۰۳- گزینهٔ «۴» (محمدرضا جمشیدی)

با توجه به رابطهٔ $K_a = \frac{[H^+]^2}{M-[H^+]}$، بین K_a و غلظت اسید (M)، رابطهٔ مستقیمی وجود ندارد و K_a فقط به دما وابسته است.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۴)

۱۰۴- گزینهٔ «۳» (محمد عظیمیان‌زواره)

عبارت‌های (پ)، (ت) و (ث) درست می‌باشند.

بررسی برخی از عبارت‌ها:

الف) سرانجام مقدار واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌شود ولی لزوماً با هم برابر نمی‌شود.

ب) HNO_3 (نیتریک اسید) یک اسید قوی است و واکنش یونش آن تعادلی نمی‌باشد.

پ) ثابت تعادل (K) یک واکنش تعادلی فقط تابع دما است.

ت) در باران معمولی H_2CO_3 و در باران اسیدی که فقط H_2SO_4 دو پروتونه است در باران اسیدی اسیدهای قوی HNO_3 و H_2SO_4 وجود دارند.

ث) زیرا در شرایط یکسان قدرت اسیدی استیک اسید از فورمیک اسید کمتر است و هر چه قدرت اسیدی کمتر باشد، در شرایط یکسان، مجموع شمار یون‌ها و مولکول‌ها کمتر است.

مجموع غلظت یون‌ها و مولکول‌های یک اسید ضعیف:

$$
\begin{array}{lccc}
 & HA(aq) & \rightleftharpoons H^+(aq) + & A^-(aq) \\
\text{غلظت اولیه :} & M & - & - \\
\text{غلظت ثانویه :} & M-M\alpha & M\alpha & M\alpha
\end{array}
$$

$$\Rightarrow (M-M\alpha)+M\alpha+M\alpha = M+M\alpha$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

۱۰۵- گزینهٔ «۴» (یاسر راش)

ابتدا ثابت یونش و درجهٔ یونش اسید فرضی HA را قبل از رقیق شدن حساب می‌کنیم:

$$
\begin{cases}
\alpha_{HA} = \frac{۲}{۲+۸} = ۰/۲ \quad , \\
M_{HA} = \frac{n}{V} = \frac{۱۰\times ۰/۰۳}{۰/۶} = ۰/۵\,mol.L^{-1} \\
K_a = \frac{\alpha^2 M}{1-\alpha} = \frac{(۰/۲)^2 \times ۰/۵}{1-۰/۲} = \frac{۱}{۴۰}\,mol.L^{-1}
\end{cases}
$$

با افزایش صد در صدی α، مقدار آن به $0/4$ می‌رسد. از آنجا که دما ثابت است، K_a بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین در محلول رقیق داریم:

$$\alpha_{HA}=0/4 \Rightarrow K_a=\frac{(0/4)^2\times M_{HA}}{1-0/4}=\frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow M_{HA}=\frac{3}{32}\,mol.L^{-1}$$

بنابراین در محلول رقیق غلظت محلول به $\frac{3}{32}$ مولار می‌رسد. با توجه به رابطهٔ $M_1V_1=M_2V_2$ می‌توان نوشت:

$$0/5\times 600=\frac{3}{32}\times V_2 \Rightarrow V_2=3200\,mL$$

$$\Rightarrow \text{حجم آب مقطر افزوده شده}=3200-600=2600\,mL$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲ و ۳۳ تا ۳۶)

۱۰۶- **گزینهٔ «۲»** *(امیرمحمد کنگرانی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) پاک‌کننده‌های خورنده ممکن است اسیدی یا بازی باشند و pH کمتر یا بیشتر از ۷ داشته باشند.

۳) رسوب‌های چربی دارای خاصیت اسیدی هستند و در اثر واکنش با بازها فراورده‌های محلول در آب تولید می‌کنند.

۴) گاز هیدروژن ایجاد شده با ایجاد فشار فیزیکی، قدرت پاک‌کنندگی را افزایش می‌دهد.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۱۲، ۱۳ و ۲۸ تا ۳۲)

۱۰۷- **گزینهٔ «۲»** *(محسن مجنونی)*

برای حل سؤال ابتدا باید غلظت یون هیدرونیوم را در هر دو محلول اولیه محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} HA \text{ در } [H^+]=10^{-3/7} \\ \Rightarrow [H^+]=10^{0/3}\times 10^{-4}=2\times 10^{-4}\,mol.L^{-1} \\ HB \text{ در } [H^+]=10^{-4/7}=10^{0/3}\times 10^{-5}=2\times 10^{-5}\,mol.L^{-1} \end{cases}$$

حال برای محاسبهٔ غلظت یون هیدرونیوم در محلول حاصل از مخلوط آن‌ها داریم:

$$[H^+]_{\text{نهایی}}=\frac{mol\ H^+}{\text{حجم کل محلول}}$$

$$=\frac{2\times 10^{-4}mol.L^{-1}\times 0/02L+2\times 10^{-5}mol.L^{-1}\times 0/03L}{(0/02+0/03)L}$$

$$=9/2\times 10^{-5}\,mol.L^{-1}$$

برای محاسبهٔ pH محلول داریم:

$$pH=-\log[H^+]$$

$$pH=-\log(9/2\times 10^{-5})$$

$$pH\simeq -(\log 9+\log 10^{-5})=-(2\log 3+\log 10^{-5})$$

$$=(-2)\times 0/48+5=4/04\simeq 4$$

توجه: مقدار عددی $\log 9/2$ با $\log 9$ اختلاف بسیار کمی دارد، پس به جای $\log 9/2$، $\log 9$ را محاسبه می‌کنیم.

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴، ۲۵ و ۳۳ تا ۳۶)

۱۰۸- **گزینهٔ «۱»** *(روزبه رضوانی)*

$$pH_{\text{لوله بازکن}}=13/4 \Rightarrow [H^+]=10^{-13/4}=10^{0/6}\times 10^{-14}$$

$$=4\times 10^{-14}\,mol.L^{-1}$$

$$pH_{\text{شیشه‌پاک‌کن}}=10/7 \Rightarrow [H^+]=10^{-10/7}=10^{0/3}\times 10^{-11}$$

$$=2\times 10^{-11}\,mol.L^{-1}$$

محلول لوله‌بازکن pH بزرگ‌تری دارد و از طرف محلول لوله بازکن باز قوی $NaOH$ است ولی در شیشه‌پاک‌کن NH_3 وجود دارد که یک باز ضعیف است.

$$\frac{[H^+]_{\text{لوله بازکن}}}{[H^+]_{\text{شیشه پاک‌کن}}}=\frac{4\times 10^{-14}}{2\times 10^{-11}}=0/002$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

۱۰۹- **گزینهٔ «۲»** (فرشید مرادی)

$$pH = ۱/۵ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۵} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۵}$$

$$= ۳ \times ۱۰^{-۲} mol.L^{-۱}$$

$$pH = ۲/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲/۷} = ۱۰^{-۳} \times ۱۰^{۰/۳}$$

$$= ۲ \times ۱۰^{-۳} mol.L^{-۱}$$

$$۰/۰۳ - ۰/۰۰۲ = ۰/۰۲۸ mol.L^{-۱} \xrightarrow{\times ۰/۵L} ۰/۰۱۴ mol\ H^+$$

$$\sim ۰/۰۱۴ mol\ HCl$$

$$۰/۰۱۴ mol\ HCl \times \frac{۱mol\ NaHCO_۳}{۱mol\ HCl} \times \frac{۸۴g\ NaHCO_۳}{۱mol\ NaHCO_۳}$$

$$\times \frac{۱۰۰۰mg\ NaHCO_۳}{۱g\ NaHCO_۳} = ۱۱۷۶mg\ NaHCO_۳$$

راه دوم:

$$\frac{۰/۰۱۴}{۱} = \frac{x \times ۱۰^{-۳}}{۱ \times ۸۴} \Rightarrow x = ۱۱۷۶mg\ NaHCO_۳$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۲۴ تا ۳۲)

۱۱۰- **گزینهٔ «۳»** (امیرحسین طیبی)

می‌دانیم گل ادریسی در خاک‌های با pH بازی به رنگ سرخ شکوفا می‌شود، در نتیجه محلول نهایی بازی است.

شمار مول یون‌ها در محلول اسید اولیه:

$$pH = ۰/۷ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۰/۷} = ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{۰/۳} = ۰/۲ mol.L^{-۱}$$

$$[H^+] = [Cl^-] = ۰/۲ mol.L^{-۱} \Rightarrow mol\ H^+ = mol\ Cl^-$$

$$= ۰/۲ \times \frac{۱}{۲} = ۰/۱$$

شمار مول یون‌ها در محلول باز اولیه:

$$pH = ۱۳/۵ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۳/۵} mol.L^{-۱}$$

$$\xrightarrow{[H^+][OH^-] = ۱۰^{-۱۴}} [OH^-] = ۱۰^{-۰/۵} mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow [OH^-] = ۱۰^{-۰/۵} = ۱۰^{-۱} \times ۱۰^{۰/۵} = ۰/۳ mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-] = [Na^+] = ۰/۳ mol.L^{-۱} \Rightarrow mol\ OH^- = mol\ Na^+$$

$$= ۰/۳ \times V \times ۱۰^{-۳} mol$$

می‌دانیم که اسیدها و بازهای قوی در مخلوط شدن با همدیگر طبق واکنش $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_۲O(l)$ خنثی می‌شوند. محلول نهایی خاصیت بازی دارد در نتیجه $mol\ OH^- > mol\ H^+$ می‌باشد.

$$\left.\begin{aligned} mol\ OH^-_{\text{باقی‌مانده}} &= (\frac{۳}{۱۰} \times V \times ۱۰^{-۳}) - \frac{۱}{۱۰} \\ mol\ Na^+ &= \frac{۳}{۱۰} \times V \times ۱۰^{-۳} \\ mol\ Cl^- &= \frac{۱}{۱۰} \end{aligned}\right\}$$

$$\text{مجموع مول تمام یون‌ها} = \frac{۶}{۱۰} \times V \times ۱۰^{-۳} mol$$

$$\text{مجموع غلظت یون‌ها} = \frac{\text{مجموع مول یون‌ها}}{\text{حجم نهایی}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۶}{۱۰} \times V \times ۱۰^{-۳}}{(۵۰۰ + V) \times ۱۰^{-۳}} = \frac{۰/۶V}{۵۰۰ + V} = ۰/۳۶$$

$$۱۸۰ + ۰/۳۶V = ۰/۶V \Rightarrow ۱۸۰ = ۰/۲۴V \Rightarrow V = ۷۵۰ mL$$

(شیمی ۳- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

شیمی ۱

۱۱۱- گزینهٔ «۲» *(حمید ذبحی)*

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) اغلب گازها نامرئی بوده و به‌طور معمول وجود آن‌ها را در اطراف خود حس نمی‌کنیم.

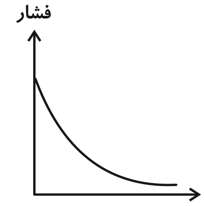
ب) تغییرات دما در هواکره دلیلی بر لایه‌ای بودن آن است (نه تغییرات فشار)

پ) دما در ابتدای تروپوسفر برحسب کلوین: $۲۷۳+۱۲=۲۸۵\,K$

تغییرات دما تا ارتفاع ۱۰ کیلومتری: $-۶\times۱۰=-۶۰\,K$

$$\text{درصد تغییرات}=\frac{\text{تغییرات دما}}{\text{دمای اولیه}}\times۱۰۰\Rightarrow\frac{-۶۰}{۲۸۵}\times۱۰۰\simeq-۲۱\%$$

ت) طبق شکل صفحهٔ ۴۷ کتاب درسی و نمودار زیر، با توجه به کاهش شیب نمودار با افزایش ارتفاع نتیجه می‌گیریم تغییرات فشار همانند فشار، با افزایش ارتفاع کاهش می‌یابد.



(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸ و ۵۲)

۱۱۲- گزینهٔ «۴» *(امیرحسین طیبی)*

منابع زمینی هلیم از هواکره سرشارتر و برای تولید هلیم در مقیاس صنعتی مناسب‌ترند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گاز CO_2 توسط جانوران تولید می‌شود.

۲) گاز N_2 در ساختار خود پیوند سه‌گانه دارد. $:N\equiv N:$

۳) گاز Ar در تولید لامپ‌های رشته‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱۱۳- گزینهٔ «۱» *(محمد عظیمیان‌زواره)*

بررسی عبارت‌های نادرست:

پ) در شرایط یکسان، نقطه جوش گازها به صورت زیر است:

$$\underset{-۱۹۶^\circ C}{N_2}<\underset{-۱۸۶^\circ C}{Ar}<\underset{-۱۸۳^\circ C}{O_2}$$

ت) هلیم نمی‌سوزد و به صورت آزاد همراه محصولات حاصل از سوختن خارج می‌شود.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱۱۴- گزینهٔ «۴» *(امیرعلی بیات)*

اطلاعات صحیح هر ردیف:

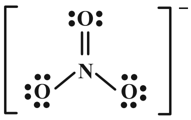
۱) (۲ غلط)

$Fe_3(PO_4)_2\Rightarrow$ فسفات (II) آهن $\Rightarrow ۲\times۳$ الکترون مبادله شده

۲) (۲ غلط)

$CO\Rightarrow$ کربن مونوکسید $\Rightarrow :C\equiv O:$

۳) (۱ غلط)

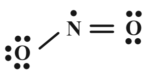
$NO_3^-\Rightarrow$ نیترات $\Rightarrow$ 

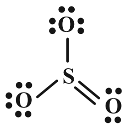
۴) (بدون غلط)

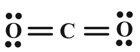
$ScN\Rightarrow$ اسکاندیم نیترید $\Rightarrow ۱\times۳$ الکترون مبادله شده

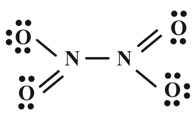
(شیمی ۱- صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

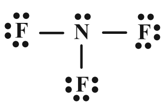
۱۱۵- گزینهٔ «۳» *(محسن مجنونی)*

 $\Rightarrow\frac{۵}{۶}\simeq۰/۸۳$ ✗

 $\Rightarrow\frac{۸}{۸}=۱$ ✓

 $\Rightarrow\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ ✗

 $\Rightarrow\frac{۱۰}{۱۴}\simeq۰/۷۱$ ✗

 $\Rightarrow\frac{۱۰}{۶}\simeq۱/۶۷$ ✓

$:C\equiv O:$ $\Rightarrow\frac{۲}{۶}\simeq۰/۳۳$ ✗

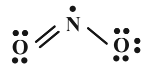
با توجه به ساختار لوویس مولکول‌ها گزینهٔ «۳» صحیح است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۱۱۶- **گزینهٔ «۲»** *(یاسر راش)*

بررسی گزینه‌ها:

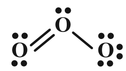
۱) منظور نیتروژن است. ساختار لوویس NO_2 به صورت زیر است:

اتم مرکزی جفت الکترون ناپیوندی ندارد $\Rightarrow$ 

۲) منظور گوگرد است کـه دارای دو نـوع اکسـید (SO_2 و SO_3) اسـت. SO_2 به همراه اکسیدهای نیتروژن (NO_x)، در نهایت باعث ایجاد بـاران اسیدی می‌شوند.

۳) منظور کربن است که میزان اکسید آن یعنـی CO_2 در سـدهٔ اخیـر در هواکره به میزان قابل توجهی افزایش داشته است.

۴) منظور اکسیژن است. مولکول مـورد نظـر O_3 خواهـد بـود کـه سـاختار لوویس آن به صورت زیر است:

دارای ۳ جفت الکترون پیوندی در ساختار خود است $\Rightarrow$ 

(شیمی ۱- صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۱۱۷- **گزینهٔ «۳»** *(آرمان قنواتی)*

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) این گزینه در صورتی صحیح است که ظرف واکنش سر باز نباشد.

۲) نماد « $\xrightarrow{\Delta}$ » برای شروع واکنش باید مخلوط واکنش‌دهنده‌هـا گـرم شوند.

۳) واکنش شیمیایی را می‌توان تغییر شیوهٔ اتصال اتم‌هـا بـه یکـدیگر در نظـر گرفت چرا که عناصر طی واکنش تغییر نمی‌کنند و صرفاً شیوهٔ اتصال آن‌ها به هم تغییر می‌کند.

۴) هدف از موازنهٔ واکنش‌ها برابر شدن جرم (یا تعداد اتـم‌هـا) در دو طـرف واکنش است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۱۱۸- **گزینهٔ «۴»** *(سعید تیزرو)*

واکنش‌های موازنه شده به صورت زیر هستند:

$$I)\ ۲KNO_۲ + ۶KI + ۸HCl \rightarrow ۳I_۲ + ۲NO + ۸KCl + ۴H_۲O$$

$$II)\ KBrO_۳ + ۵KBr + ۶HCl \rightarrow ۳Br_۲ + ۶KCl + ۳H_۲O$$

براساس واکنش‌های موازنه شده، ضریب هر سه گونه در واکنش (I) بیشتـر از واکنش (II) است.

نکته: با توجه به موازنه عنصر Cl، ضرایب HCl و KCl در هر واکـنش با هم برابر است. در نتیجه اگـر ضـریب HCl در واکـنش (I) بیشتـر یـا کمتر از واکنش (II) باشد، ضریب KCl هم به همـان صـورت اسـت. در نتیجه تنها گزینهٔ «۴» می‌تواند پاسخ سؤال باشد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱۱۹- **گزینهٔ «۱»** *(فرشید مرادی)*

تمام عبارت‌ها نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) بخارآب آلاینده هواکره محسوب نمی‌شود.

ب) استفاده از سشوار به عنوان منبع مصرف‌کننـدهٔ جریـان بـرق روی مقـدار $CO_۲$ تولیدی نقش داشته و باعث افزایش گرمای جهانی می‌شود.

پ) استفاده از گاز طبیعـی بـه جـای نفـت خـام بـرخلاف اسـتفاده از انـرژی خورشید به جای گرمای زمین، مقدار $CO_۲$ تولیدی را کاهش می‌دهد.

ت) رابطهٔ افزایش مقدار $CO_۲$ با میانگین جهانی دمـای سـطح کـرهٔ زمـین مستقیم، اما رابطهٔ مساحت سطح برف در نیم‌کره شـمالی بـا میـانگین جهـانی سطح آب‌های آزاد معکوس است.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۷)

۱۲۰- **گزینهٔ «۲»** *(محمدرضا جمشیدی)*

عبارت‌های (ب)، (پ) و (ت) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) اگر لایه هواکره وجود نداشت، میانگین دمای کـره زمـین بـه $-۱۸^{\circ}C$ کاهش می‌یافت.

پ) بخش عمده‌ای از پرتوهای تابیده شده از سمت خورشید به وسـیلهٔ زمـین جذب می‌شود.

ت) انرژی پرتوهای بازتابیده از زمین نسبت به پرتوهای تابیده شده از سـمت خورشید، کمتر است و در نتیجه طول موج بیشتری دارد.

(شیمی ۱- صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

شیمی ۲

۱۲۱- گزینهٔ «۳» *(ممد عظیمیان‌زواره)*

بیشترین اختلاف میان سرانهٔ مصرف مواد غذایی در ایران و جهان مربوط به شیر می‌باشد.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

۱۲۲- گزینهٔ «۲» *(امیر حاتمیان)*

عبارت‌های (ب) و (پ) نادرست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) نان و سیب‌زمینی هر دو تقریباً از نشاسته تشکیل شده و سرعت هم‌دما شدن آن‌ها با محیط به میزان آب موجود در آن‌ها بستگی دارد و از آن‌جایی که مقدار آب در نان کمتر از سیب‌زمینی است بنابراین تکه نان زودتر با محیط هم‌دما می‌شود.

ب) خوردن بستنی و آزاد شدن انرژی از آن در طی دو مرحله اتفاق می‌افتد. فرایند اول، فرایند هم‌دما شدن بستنی با بدن بوده که فرایندی گرماگیر است؛ سپس بستنی هم‌دما شده در طی یک فرایند گرماده با آزاد کردن انرژی، تبدیل به فراورده‌های حاصل از گوارش بستنی می‌شود.

پ) گرما هم‌ارز با آن مقدار انرژی گرمایی است که به دلیل تفاوت در دما جاری می‌شود.

ت) از میان دو جسم مختلف با جرم یکسان، به ازای دادن گرمای یکسان به آن‌ها، آن ماده‌ای که ظرفیت گرمایی ویژهٔ بیشتری دارد، افزایش دمای کمتری پیدا می‌کند.

$$Q = mc\Delta\theta \Rightarrow \uparrow c = \frac{Q}{m\Delta\theta \downarrow}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۳ و ۵۶ تا ۶۱)

۱۲۳- گزینهٔ «۲» *(آرمان قنواتی)*

بررسی موارد نادرست:

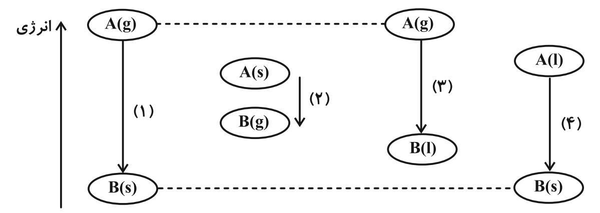
الف) شیمی‌دان‌ها گرمای جذب شده یا آزاد شده در هر واکنش شیمیایی را به‌طور عمده (نه کاملاً!) وابسته به تفاوت میان انرژی پتانسیل مواد واکنش‌دهنده و فراورده می‌دانند.

ت) گرما از ویژگی‌های یک نمونه ماده نیست و نباید برای توصیف آن به کار رود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۵۷، ۵۸، ۶۲ و ۶۳)

۱۲۴- گزینهٔ «۱» *(هدی بهاری‌پور)*

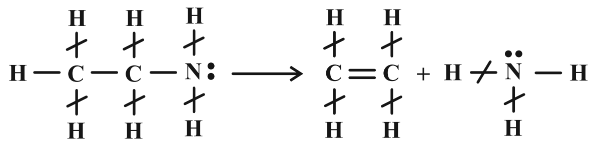
با توجه به مشابه بودن حالت فیزیکی X در گزینه‌ها نتیجه به وضعیت A و B بستگی دارد.



با توجه به نمودار، انرژی آزاد شده در واکنش گزینهٔ «۱» بیشترین مقدار است.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴)

۱۲۵- گزینهٔ «۲» *(ممدرضا طاهری‌نژاد)*



ابتدا ۴ پیوند $C-H$ و ۲ پیوند $N-H$ که در دو طرف واکنش تکرار شده‌اند را ساده می‌کنیم.

$$\Delta H_{(\text{واکنش})} = \left[\begin{matrix}\text{مجموع آنتالپی پیوندها}\\ \text{در مواد واکنش‌دهنده}\end{matrix}\right] - \left[\begin{matrix}\text{مجموع آنتالپی پیوندها}\\ \text{در مواد فراورده}\end{matrix}\right]$$

$$\Rightarrow ۴۵ = (\Delta H(C-H) + \Delta H(C-C) + \Delta H(C-N))$$

$$-(\Delta H(C=C) + \Delta H(N-H)) \xrightarrow{۱/۴\Delta H(C-N)=\Delta H(N-H)}$$

$$۴۵ = (۴۱۵ + ۳۴۸ + \frac{\Delta H(N-H)}{۱/۴}) - (۶۱۴ + \Delta H(N-H))$$

$$\Rightarrow \Delta H(N-H) = ۳۶۴\,kJ.mol^{-۱}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹)

۱۲۶- گزینهٔ «۲» *(امیرعلی بیات)*

مورد سوم و چهارم نادرست هستند.

بررسی هر یک از موارد:

الف) در ساختار این مولکول حلقهٔ بنزن دیده می‌شود که همانند ضد بید (نفتالن) جزو دستهٔ آروماتیک به حساب می‌آیند.

ب) در ساختار این مولکول گروه‌های عاملی آمین، اسید و ... حضور دارد که می‌توانند به صورت درون مولکولی با هم پیوند هیدروژنی تشکیل دهند. همچنین این مولکول می‌تواند با مولکول‌های آب نیز پیوند هیدروژنی تشکیل دهد.

پ) مولکول کلسترول دارای گروه عاملی هیدروکسیل $(-OH)$ می‌باشد.

ت) این مولکول شامل ۳ پیوند دوگانه $C=C$ می‌باشد پس در شرایط STP با ۶۷/۲ لیتر H_2 سیر می‌شود.

$$۳\,mol\ \text{پیوند دوگانه} \times \frac{۱mol\ H_۲}{۱mol\ \text{پیوند دوگانه}} \times \frac{۲۲/۴L\ H_۲}{۱mol\ H_۲}$$

$$= ۶۷/۲L\ H_۲$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۱۲۷- گزینهٔ «۳» *(ممدرضا پورجاوید)*

اگر درصد جرمی کربوهیدرات، چربی و پروتئین موجود در این ماده غذایی را به ترتیب x، y و z در نظر بگیرید، با توجه به این‌که ٪۱۰ از این مادهٔ غذایی شامل مواد دیگری است، می‌توان گفت: $x+y+z=۹۰$

از طرفی طبق اطلاعات داده شده در صورت مسئله $z=۳y$ خواهد بود. ضمن آن‌که با توجه به رابطهٔ تعیین ارزش سوختی مواد غذایی خواهیم داشت:

ارزش سوختی مادهٔ غذایی =

$$(\frac{x}{100}g\times 17\frac{kJ}{g})+(\frac{y}{100}g\times 38\frac{kJ}{g})+(\frac{z}{100}g\times 17\frac{kJ}{g})=16/35\frac{kJ}{g}$$

$$\Rightarrow 1635 = 17x+38y+17z$$

به این ترتیب برای تعیین مقادیر x، y و z باید دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} 17x+38y+17z=1635 \xrightarrow{z=3y} \\ 17x+38y+17(3y)=1635 \Rightarrow 17x+89y=1635 \\ x+y+z=90 \xrightarrow{z=3y} x+4y=90 \end{cases}$$

با توجه به دو معادلهٔ جدید به دست آمده می‌توان گفت:

$$\begin{cases} 17x+89y=1635 \\ x+4y=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17x+89y=1635 \\ -17x-68y=-1530 \end{cases}$$

$$21y=105 \Rightarrow y=5\%$$

حال می‌توان درصد جرمی پروتئین و کربوهیدرات موجود در این مادهٔ غذایی را نیز به دست آورد:

$$z=3y=3\times 5=15\%$$

$$x+y+z=90 \Rightarrow x+5+15=90 \Rightarrow x=70\%$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

۱۲۸- گزینهٔ «۱» *(محسن مجنونی)*

ابتدا باید با استفاده از واکنش‌های داده شده، آنتالپی واکنش مدنظر را به دست آوریم، بر این اساس با توجه به ترکیب‌های H_2O و N_2H_4، واکنش‌های ۱ و ۲ را تغییر نمی‌دهیم. واکنش ۳ را هم قرینه می‌کنیم تا گاز N_2 را هم در واکنش داده شده ایجاد کنیم:

$$2H_2(g)+O_2(g) \rightarrow 2H_2O(g) \qquad \Delta H=-245kJ$$
$$N_2H_4(g)+H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g) \qquad \Delta H=-190kJ$$
$$2NH_3(g) \rightarrow N_2(g)+3H_2(g) \qquad \Delta H=90kJ$$

$$N_2H_4(g)+O_2(g) \rightarrow N_2(g)+2H_2O(g)$$

$$\Delta H=-245-190+90=-345kJ$$

به ازای تولید ۶۴گرم فراورده $(28+2\times 18)$، $345kJ$ گرما آزاد شده است. پس با یک تناسب ساده می‌توان جرم فراورده تولید شده به ازای آزاد شدن $1380kJ$ گرما را به دست آورد:

$$\frac{64g\ \text{فراورده}}{x\ g\ \text{فراورده}}=\frac{345kJ}{1380kJ} \Rightarrow x=256g\ \text{فراورده}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۱۲۹- گزینهٔ «۱» *(امیرحسین طیبی)*

واکنش موازنه شده: $2N_2O_5 \rightarrow 4NO_2+O_2$

برای به دست آوردن ΔH واکنش داده شده باید واکنش اول و دوم را قرینه و ۲ برابر کنیم و واکنش سوم را فقط قرینه کنیم.

$$2N_2(g)+2O_2(g) \rightarrow 4NO(g) \qquad \Delta H=360kJ$$
$$4NO(g)+2O_2(g) \rightarrow 4NO_2(g) \qquad \Delta H=-228kJ$$
$$2N_2O_5(g) \rightarrow 2N_2(g)+5O_2(g) \qquad \Delta H=-21kJ$$

$$\Delta H=360+(-228)+(-21)=111kJ$$

	$2N_2O_5$	$\rightarrow$ $4NO_2$	+ O_2
مقادیر اولیه :	$0/5$	0	0
تغییرات :	$-2x$	$+4x$	$+x$
مقادیر نهایی :	$0/5-2x$	$4x$	x

$$\Rightarrow \frac{\text{شمار مول‌های گازی نهایی}}{\text{شمار مول‌های گازی اولیه}}=\frac{0/5-2x+4x+x}{0/5}=2$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{6} \Rightarrow Q=2\times\frac{1}{6}mol\ N_2O_5\ \text{مصرف شده}$$

$$\times\frac{111kJ\ \text{گرما}}{2mol\ N_2O_5\ \text{مصرف شده}}=18/5kJ\ \text{انرژی مصرف شده}$$

(شیمی ۲- صفحه‌های ۷۴ تا ۷۷)

۱۳۰- گزینهٔ «۱» *(امیرعلی بیات)*

همهٔ موارد درست هستند.

بررسی برخی از موارد:

واکنش‌های انجام شده به صورت زیر می‌باشند:

$$N_2+2H_2 \rightarrow N_2H_4$$

$$N_2H_4+H_2 \rightarrow 2NH_3$$

- مورد سوم: علامت ΔH تشکیل هیدرازین (+) است و علامت ΔH سوختن (-) پس این عبارت صحیح است.

- مورد چهارم: مولکول N_2H_4 به دلیل این‌که سطح انرژی بالاتری دارد، ناپایدارتر است.

- مورد پنجم: مطابق واکنش‌های نوشته شده N_2H_4 در یک واکنش تولید و در واکنش دیگری مصرف می‌شود.

(شیمی ۲- صفحه‌های ۷۲ تا ۷۷)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفترچه پاسخ

آزمون هوش و استعداد

(دورهٔ دوم)

۱۸ آبان

تعداد کل سؤالات آزمون: ۲۰

زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

گروه فنی تولید

مسئول آزمون	حمید لنجان‌زاده اصفهانی
ویراستار	فاطمه راسخ، حمیدرضا رحیم خانلو
مدیر گروه مستندسازی	محیا اصغری
مسئول درس مستندسازی	علیرضا همایون‌خواه
طراحان	حمید اصفهانی، فاطمه راسخ، سجاد محمدنژاد، حمید گنجی، فرزاد شیرمحمدلی، کیارش صانعی، حلما حاجی نقی
حروف‌چینی و صفحه‌آرایی	معصومه روحانیان
ناظر چاپ	حمید عباسی

استعدادتحلیلی

۲۵۱- گزینهٔ «۲» *(حمید اصفهانی)*

در تصویر، فردی ثروتمند به همان اندازه به پول می‌اندیشد که فردی فقیر. این یعنی پول ـ برای شخص طمّاع ـ هرگز کافی نیست. تصویر به نوعی انتقادی است از جایگاه پول در جوامع امروزی، که از ابزار به هدف تبدیل شده است.

(هوش کلامی)

۲۵۲- گزینهٔ «۳» *(حمید اصفهانی)*

شکل درست متن:

ج) چنین به نظر می‌رسد کـه پـس از جـدایی اوّلیـه‌ی زبـان‌هـای ایرانـی از زبان‌های هندواروپایی شرقی، نیاز به یک تفکیک دوباره‌ی زبانی نزد ایرانیـان حس شده است.

الف) حکومت ایران در آن زمان، هخامنشیان، زبان فارسی را برای این منظور به عنوان وسیله‌ای برگزیدند که قبایل مختلف ایرانی را متحّد کنند.

ب) زبان فارسی به‌خوبی به هدفی که برای آن تعریف شده بود رسید و باعث اتّحاد قبایل ساکن در فلات ایران شد.

د) امروزه برخی دسته‌ها و گروه‌های ایرانـی تصـوّر مـی‌کننـد انتخـاب زبـان فارسی به عنوان زبان مرکزی عامل ضعف زبان‌های ایشان شده است.

هـ) حال آن که اگر زبان فارسی را نه به عنـوان جـایگزین بلکـه بـه عنـوان ابزاری برای تقویت روابط زبانی در نظر بگیریم، نادرستی این استدلال آشکار می‌شود.

(هوش کلامی)

۲۵۳- گزینهٔ «۱» *(حمید اصفهانی)*

شکل درست متن:

الف) شنیدم که شاهی به هندوستان / برافروخت بزم از رخ دوستان

د) چو طوطی به هر نکته گویا شدند / به نادر خبرها شکرخا شدند

ب) یکی گفت کاندر دیار عرب / یکی جانور دیده‌ام بس عجب

ج) شترپیکری رسته زو بال و پر / ولیکن نه پرنده نی باربر

(هوش کلامی)

۲۵۴- گزینهٔ «۱» *(کنکور کارشناسی ارشد زبان و ادبیّات فارسی)*

در بیت صورت سؤال، شاعر می‌گوید درست است که عیب، بهتر است پنهانی باشد نه آشکار، امّا اگر دوست همچون آیینه باشـد و عیـب دوسـت را بـه او گوشزد کند، بهتر است. این یعنی عیب را نباید از دوست نهان داشت.

(هوش کلامی)

۲۵۵- گزینهٔ «۴» *(کنکور کارشناسی ارشد زبان و ادبیّات فارسی)*

در بیت صورت سؤال، «خدایی» یعنی «یک خدا». دقّـت کنیـد گزینـه‌هـای «۱»، «۲» و «۳» همگی از واژه‌هـا و عبـارات «کنـه»، «حقیقـت» و «ذات» استفاده کرده‌اند که در صورت سؤال نیست، بیت تنها به «هسـتی» خداونـد اشاره می‌کند و نه چیستی او. «اگر خدا او را راهنمـایی نمـی‌کـرد، کـی بـه وجود خدا آگاه می‌شد؟»

(هوش کلامی)

۲۵۶- گزینهٔ «۳» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

استدلالِ کمیتهٔ انضباطی در متن صورت سؤال ناقص است، چرا که تعـداد و مبلغ جریمه‌ها به شرطی تعیین‌کننده است که میزان خطاهـا یکسـان بـوده باشد. عبارت گزینهٔ «۳» به خوبی این موضوع را آشکار می‌کنـد: اگـر مبـالغِ جریمه‌ها بـا میـزانِ ناشایسـت‌بـودنِ رفتارهـا متناسـب نبـوده باشـد، مبـالغ جریمه‌ها تعیین‌کنندهٔ عدالت یا بی‌عدالتیِ کمیتهٔ انضباطی نیست.

(هوش کلامی)

۲۵۷- گزینهٔ «۳» *(کتاب استعدادتحلیلی هوش کلامی)*

اگر قیمت کالایی ۱۰۰۰ تومنی را بیسـت درصـد افـزایش دهـیم، مـی‌شـود ۱۲۰۰ تومن. اگر قیمت کالایی ۲۰۰۰ تـومنی را ده درصـد افـزایش دهـیم، می‌شود ۲۲۰۰ تومن. همچنان قیمت کالای دوم بیشتر است، هرچند درصد افزایش قیمت آن کمتر بوده است. اسـتدلال صـورت سـؤال نادرسـت اسـت چون بیشتر بودن تعداد هواداران اولیهٔ فوتبال از والیبـال را در نظـر نگرفتـه است.

(هوش کلامی)

۲۵۸- گزینهٔ «۳» *(حلما حاجی‌نقی)*

در آن عددهای سه‌رقمی $(\triangle\bigcirc\square)$ که صورت سؤال وصف می‌کند، رابطهٔ $\bigcirc-۱=\frac{\square+\triangle}{۲}$ برقرار اسـت. پـس حاصـل $\triangle+\square$ بایـد زوج باشـد تـا حاصل $\frac{\square+\triangle}{۲}$ عدد طبیعی باشد. در ثانی، باید عددی حاصل شود که اگر آن را در خودش ضرب کنیم، یکان آن دو واحد بیش‌تر شود. همهٔ ده رقم را برای یکان امتحان می‌کنیم:

یکان فرضی عدد فعلی	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
یکان فرضی عدد نهایی	۰	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱

که تنها در سه حالت این اتفاق ممکن است رخ دهد. حال با توجه به مقدمهٔ بالا می‌توانیم اعداد را حدس بزنیم:

$$\triangle=۲\Rightarrow\frac{\square+۲}{۲}=\bigcirc-۱\Rightarrow\square=۲\bigcirc-۴\Rightarrow$$

حالت‌های ممکن : $\{\bigcirc=۳,\square=۲\},\{\bigcirc=۴,\square=۴\}$

$\{\bigcirc=۵,\square=۶\},\{\bigcirc=۶,\square=۸\}$

$\Delta=۴\Rightarrow\dfrac{\square+۴}{۲}=\bigcirc-۱\Rightarrow\square=۲\bigcirc-۶\Rightarrow$

حالت‌های ممکن: $\{\bigcirc=۴,\square=۲\},\{\bigcirc=۵,\square=۴\}$

$\{\bigcirc=۶,\square=۶\},\{\bigcirc=۷,\square=۸\}$

$\Delta=۷\Rightarrow\dfrac{\square+۷}{۲}=\bigcirc-۱\Rightarrow\square=۲\bigcirc-۹\Rightarrow$

حالت‌های ممکن: $\{\bigcirc=۵,\square=۱\},\{\bigcirc=۶,\square=۳\}$

$\{\bigcirc=۷,\square=۵\},\{\bigcirc=۸,\square=۷\},\{\bigcirc=۹,\square=۹\}$

پس عددهای ممکن عبارتند از:

$\{۲۳۲,۴۴۲,۶۵۲,۸۶۲,۲۴۴,۴۵۴,۶۶۴,۸۷۴,۱۵۷,۳۶۷,۵۷۷,۷۸۷,۹۹۷\}$

(هوش منطق ریاضی)

۲۵۹- گزینهٔ «۲» *(کیارش صانعی)*

تعداد روزهای هر سال و تعداد کل روزهای عمر هر شخص را محاسبه می‌کنیم:

سال	تعداد ماه‌ها ضرب در تعداد روزهای هر ماه	روزهای عمر شخص تا پایان سال
۱	$۱\times۱=۱$	۱
۲	$۲\times۲=۴$	$۱+۴=۵$
۳	$۳\times۳=۹$	$۵+۹=۱۴$
۴	$۴\times۴=۱۶$	$۱۴+۱۶=۳۰$
۵	$۵\times۵=۲۵$	$۳۰+۲۵=۵۵$
۶	$۶\times۶=۳۶$	$۵۵+۳۶=۹۱$
۷	$۷\times۷=۴۹$	$۹۱+۴۹=۱۴۰$

پس معلوم است که شخصی که ۱۲۰ روز دارد، در هفتمین سال زندگی‌اش است، چرا که $۱۴۰>۱۲۰$ است.

بنابراین از عمر این شخص، ۹۱ روز در ۶ سال سپری شده است و $۱۲۰-۹۱=۲۹$ روز در سال هفتم. در سال هفتم، هر ماه ۷ روز دارد، پس این فرد طبق تقسیم $۲۹=(۷\times۴)+۱$ چهار ماه و یک روز در سال هفتم زندگی خود زیسته است.

(هوش منطق ریاضی)

۲۶۰- گزینهٔ «۲» *(فاطمه راسخ)*

برای درست بودنِ عبارت صورت سؤال داریم:

$(۱۰۰\bigcirc+۱۰\square+\bigcirc)\times(۱۰\bigcirc+\square)=۱۰۰۰\bigcirc+۱۰۰\square+۱۰\bigcirc+\square$

$\Rightarrow۱۰۰۰\bigcirc^۲+۱۰۰\bigcirc\square+۱۰۰\square\bigcirc+۱۰\square^۲$

$+۱۰\bigcirc^۲+\bigcirc\square=۱۰۱۰\bigcirc+۱۰۱\square$

$\Rightarrow۱۰۱۰\bigcirc^۲+۲۰۱\bigcirc\square+۱۰\square^۲=۱۰۱۰\bigcirc+۱۰۱\square$

اگر سمت راست تساوی بزرگ‌ترین مقدار خود را داشته باشد، یعنی $\bigcirc=۹$ و $\square=۸$ باشد، حاصل آن ۹۸۹۸ خواهد بود. این در حالی است که عبارت $۱۰۱۰\bigcirc^۲$ در سمت چپ حتی به ازای $\bigcirc^۲=۹$ برابر ۹۰۹۰ خواهد بود که عددی بسیار بزرگ‌تر از عبارت سمت راست خواهد شد. این یعنی $\bigcirc$ را کمینه می‌گیریم و $\square$ را حدس می‌زنیم. $\bigcirc$ نمی‌تواند صفر باشد. پس $\bigcirc=۱$ را می‌آزماییم:

$۱۰۱۰+۲۰۱\square+۱۰\square^۲=۱۰۱۰+۱۰\square$

$\Rightarrow۱۰\square^۲=-۱۹۱\square$ که تنها به ازای $\square=۰$ صحیح است:

پس عبارت‌ها به شکل زیر است:

$$\begin{array}{r}۱۰۱\\ \times\ ۱۰\\ \hline ۱۰۱۰\end{array}$$

و حاصل $\bigcirc\square\times\bigcirc\square$، برابر حاصل $۱۰\times۱۰=۱۰۰$ یعنی $\bigcirc\square\square$ خواهد بود.

(هوش منطق ریاضی)

۲۶۱- گزینهٔ «۱» *(فرزاد شیرمحمدلی)*

تعداد صفرهای سمت راست عدد حاصل برابر است با تعداد دفعاتی که می‌توان عدد را بر عدد ۱۰ تقسیم کرد و همچنان یک عدد درست طبیعی به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر، تعداد ۲×۵ هاست که تعیین‌کننده است. در عبارت صورت سؤال، تنها عدد ۵۵۵۵۵ است که عامل اول ۵ دارد، آن هم یکی، پس یک رقم صفر در سمت راست عدد حاصل وجود دارد.

(هوش منطق ریاضی)

۲۶۲- گزینهٔ «۴» *(فاطمه راسخ)*

نَه ماه دقیقِ خریدِ تلویزیون معلوم است و نَه ماه تولد خریدار و نَه ماهِ تولد فروشنده. در واقع با این داده‌ها می‌توانیم هر ماهی را پاسخ بدانیم.

(هوش ریاضی)

۲۶۳- گزینهٔ «۳» *(فاطمه راسخ)*

با دادهٔ «الف» به تنهایی نمی‌توان به پاسخ رسید، چرا که ترتیب زیر ممکن است:

دختر – پسر – دختر – پسر

پسر - دختر – پسر – دختر

با دادهٔ «ب» نیز به تنهایی نمی‌توان به پاسخ رسید، ترتیب زیر را در نظر بگیرید.

امیر – ندا – هما – امین

امیر – امین – ندا – هما

اما اگر هر دو داده را داشته باشیم، فقط یک حالت ممکن است که در آن فرزند دوم پسر نیست: امیر – ندا – امین – هما

(هوش منطق ریاضی)

۲۶۴- گزینهٔ «۴» (فاطمه راسخ)

با دادهٔ «الف» داریم:

$$۲\square+\bigcirc\geq ۲\bigcirc+\square\Rightarrow\square\geq\bigcirc$$

که معلوم نیست $\square=\bigcirc$ است یا $\square>\bigcirc$

با دادهٔ «ب» نیز هیچ قیاسی بین $\square$ و $\bigcirc$ نداریم، پس پاسخ گزینهٔ «۴» است.

(هوش منطقی ریاضی)

۲۶۵- گزینهٔ «۲» (فاطمه راسخ)

از طریق یکان می‌توان به راحتی به پاسخ رسید:

گزینهٔ «۱»: $۱۷۲۳\times۱۳۴۵+۸۷۴۵-۲\Rightarrow ۳\times۵+۵-۲\Rightarrow ۵+۳\Rightarrow ۸$

گزینهٔ «۲»: $۱۲۳۱+۲۳۴\times۹۸۷۲-۲۰\Rightarrow ۱+۴\times۲-۰\Rightarrow ۱+۸=۹$

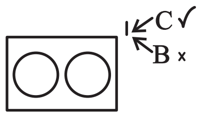
گزینهٔ «۳»: $۲۶۷۹۸+۳۹۹۹\times۵۷۳-۴۵\Rightarrow ۸+۹\times۵-۵\Rightarrow ۸+۰\Rightarrow ۸$

گزینهٔ «۴»: $۹۸۹۸\times۲۳۵+۲۴۶-۹۸\Rightarrow ۸\times۵+۶-۸\Rightarrow ۴۶-۸\Rightarrow ۸$

(هوش منطقی ریاضی)

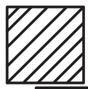
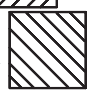
۲۶۶- گزینهٔ «۴» (فاطمه راسخ)

واضح است که کدهای C در شکل‌هایی است که پاره‌خطی اضافه دارند و کدهای B در شکل‌هایی است که پاره‌خط اضافه ندارند. همچنین A کد شکل‌هایی است که تعداد نقطه‌های دایره‌ای آن‌ها برابر است، D کد شکل‌هایی که دایرهٔ سمت راست آن‌ها بیش‌تر از دایرهٔ سمت چپ نقطه دارد و E شکل‌هایی که دایرهٔ سمت چپ آن‌ها نقاط بیش‌تری نسبت به دایرهٔ سمت راست دارد.



(هوش غیرکلامی)

۲۶۷- گزینهٔ «۴» (فرزاد شیرمحمدلی)

در دو شکل صورت سؤال، هاشورها به شکل  است که شکل‌ها رقم «صفر» دارند. هاشورهای دیگر به شکل  صفر ندارند. همچنین تفاوت دیگر شکل‌ها در جایگاه هاشورخورده است:

۲	۱
۳	۴

(هوش غیرکلامی)

۲۶۸- گزینهٔ «۴» (فاطمه راسخ)

یازده مستطیل در نگاه اول در شکل هست، اما از ترکیب مستطیل‌ها نباید غافل شد:

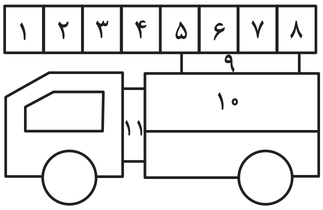
$(۱,۲),(۱,۲,۳),\ldots,(۱,۲,۳,\ldots,۸)\rightarrow$ هفت تا

$(۲,۳),(۲,۳,۴),\ldots,(۲,۳,۴,۸)\rightarrow$ شش تا

$\vdots$

با ادامهٔ این الگو، تعداد مستطیل‌ها معلوم می‌شود:

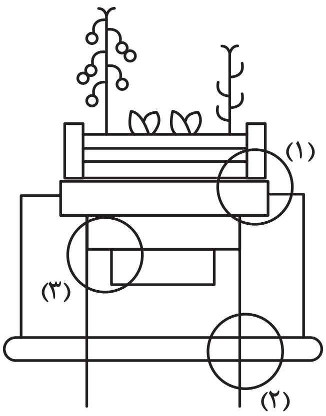
$$۱۱+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱=۳۹$$



(هوش غیرکلامی)

۲۶۹- گزینهٔ «۴» (سجاد محمدنژاد)

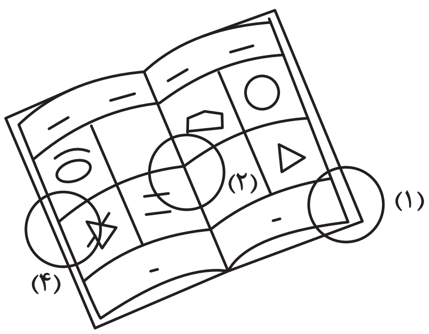
قسمت‌های مشخص شده:



(هوش غیرکلامی)

۲۷۰- گزینهٔ «۳» (حمید کنجی)

قسمت‌های مشخص شده:



(هوش غیرکلامی)
